Chapitre 2

Entiers naturels, Récurrence

Dans ce chapitre, il n'est pas question de faire une construction de $\mathbb{N}$, ni de démontrer les principales propriétés de $\mathbb{N}$, de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$

2.1 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Ce paragraphe met en place, de manière principalement axiômatique, les propriétés naturelles de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Donc, peu de démonstrations, quelques exercices

2.1.1 Axiôme 1

Nous admettons qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{N}$ appelé <u>Ensemble des entiers naturels</u>. Cet ensemble a les propriétés suivantes :

1. **Il existe une <u>addition</u> notée $+$ telle que :**
   (a) **L'addition est associative, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z)$$
   (b) **L'addition est commutative, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(x + y = y + x)$$
   (c) **L'addition possède un élément neutre « zéro » noté 0, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(x + 0 = 0 + x = x)$$
   On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   (d) **Tout élément $x \in \mathbb{N}$ est régulier pour l'addition, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x + y = x + z \Longrightarrow y = z)$$
2. **Il existe une <u>multiplication</u> notée $\times$ (ou le plus souvent omise) telle que :**
   (a) **La multiplication est associative, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x\,(yz) = (xy)\,z = xyz)$$
   (b) **La multiplication est commutative, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(xy = yx)$$
   (c) **La multiplication possède un élément neutre « un » noté 1, c'est à dire :**
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(x \times 1 = 1 \times x = x)$$

(d) Tout élément $x \in \mathbb{N}^*$ est régulier pour la multiplication, c'est à dire :

$$(\forall x \in \mathbb{N}^*)\,(\forall y \in \mathbb{N}^*)\,(\forall z \in \mathbb{N}^*)\,(xy = xz \Longrightarrow y = z)$$

3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire :

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x\,(y+z) = xy + xz)$$

Et, du fait de la commutativité de la multiplication :

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,((y+z)\,x = xy + xz)$$

Exercice 1 :

1. Etant donnés 2 entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, s'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$, démontrez que cet élément x est unique. On le notera alors $x = b - a$, et nous avons : $a + (b - a) = b$
2. Si $x = b - a$ existe, montrer que pour tout $c \in \mathbb{N}$, $cb - ca$ existe et que l'on a :

$$c\,(b-a) = cb - ca$$

3. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \times x = 0$. En déduire que 0 n'est pas régulier pour la multiplication et que, par conséquent, $0 \neq 1$

Remarque 1 :

On donne, dans cette remarque, une définition plus générale :

Définition

Soit E un ensemble dans lequel nous avons défini une opération notée $\star$

1. **La loi $\star$ est dite de composition interne si et seulement si :**

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(x \star y \in E)$$

2. **La loi $\star$ est dite de associative si et seulement si :**

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\forall z \in E)\,(x \star (y \star z) = (x \star y) \star z = x \star y \star z)$$

3. **La loi $\star$ est dite de commutative si et seulement si :**

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(x \star y = y \star x)$$

4. **La loi $\star$ admet un élément neutre e si et seulement si :**

$$(\forall x \in E)\,(x \star e = e \star x = x)$$

5. **$x \in E$ est dit régulier pour la loi $\star$ si et seulement si :**

$$(\forall a \in E)\,(\forall b \in E)\,((a \star x = b \star x) \Longrightarrow (a = b))$$

6. **$x \in E$ est dit admettre un symétrique pour la loi $\star$ si et seulement si il existe $x_1 \in E$ tel que $x \star x_1 = e$ où e est l'élément neutre (s'il existe)**
7. **Si E est muni d'une seconde loi notée $\top$, la loi $\top$ est dite de distributive par rapport à la loi $\star$ si et seulement si :**

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\forall z \in E)\,(x \top (y \star z) = x \top y \star x \top z)$$

Exercice 2 :

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère une loi de composition notée $\star$ telle que :

$$(\forall a \in \mathbb{N})\,(\forall b \in \mathbb{N})\,(a \star b = a + b + a \times b)$$

Où $+$ et $\times$ désignent l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que cette loi est interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?
2. On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par $a^{(1)} = a$ et $a^{(n)} = a^{(n-1)} \star a$
   Exprimer $a^{(2)}$,$a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de a.
3. Donner l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et n

2.1.2 Axiôme 2 : $\mathbb{N}$ ensemble totalement ordonné

1. **Ordre naturel**
   (a) **La relation $\leqslant$ définie par :**

   $$(a \leqslant b) \Longleftrightarrow ((\exists x \in \mathbb{N})\,(b = a + x))$$

   est une relation d'ordre total. Elle est appelée relation d'ordre naturel sur $\mathbb{N}$

   (b) **La relation $(a \leqslant b$ et $a \neq b)$ se note $a < b$. De plus $a \geqslant b$ signifie $b \leqslant a$ et $a > b$ signifie $b < a$**
2. **La relation d'ordre notée $\leqslant$ est compatible avec l'addition, c'est à dire :**

   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,((x \leqslant y) \Longrightarrow (x + z \leqslant y + z))$$

3. **Pour la relation d'ordre naturel sur $\mathbb{N}$, nous avons, de plus, les propriétés suivantes :**
   (a) **Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément**
   (b) **Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément**
   $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément

Remarque 2 :

0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $x = 0 + x$, car 0 est élément neutre. Donc, par définition de $\leqslant$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x$

Exercice 3 :

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, tout $y \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{N}$:

   $$(x < y) \Longrightarrow (x + z < y + z)$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, tout $y \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{N}$:

   $$(x < y) \Longleftrightarrow (x + z < y + z) \qquad \text{et} \qquad (x \leqslant y) \Longleftrightarrow (x + z \leqslant y + z)$$

3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 < x$ *(Nous avons, en particulier* $0 < 1$*)*
4. Démontrez que pour tout $c \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{N}$, nous avons :

   $$(x < y) \Longleftrightarrow (cx < cy) \qquad \text{et} \qquad (x \leqslant y) \Longleftrightarrow (cx \leqslant cy)$$

5. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{N}$, nous avons :

   $$(xy = 0) \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ OU } y = 0)$$

2.1.3 Définition d'intervalles dans $\mathbb{N}$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, tels que $a \leqslant b$. On appelle <u>intervalle</u> de $\mathbb{N}$, l'un quelconque des sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
[[a;b]] &= \{x \in \mathbb{N}/a \leqslant x \leqslant b\} \\
]]a;b[[&= \{x \in \mathbb{N}/a < x < b\} \\
[[a;b[[&= \{x \in \mathbb{N}/a \leqslant x < b\} \\
]]a;b]] &= \{x \in \mathbb{N}/a < x \leqslant b\} \\
[[a;+\infty[[&= \{x \in \mathbb{N}/a \leqslant x\} \\
]]a;+\infty[[&= \{x \in \mathbb{N}/a < x\}
\end{aligned}$$

Remarque 3 :

La notation $[[a;b]]$ est uniquement utulisée dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ pour la différencier de la notion d'intervalle réel.

2.1.4 Lemme

L'intervalle $]]0;1[[$ est vide

<u>Démonstration</u>

Supposons $]]0;1[[$ non vide. D'après 2.1.2, $]]0;1[[$ admet un plus petit élément que l'on appelle α. Par définition de l'intervalle $]]0;1[[$, nous avons $0 < \alpha < 1$.
Par compatibilité de la multiplication avec un naturel strictement positif, nous avons $0 < \alpha \Longrightarrow 0 < \alpha^2$ et $\alpha < 1 \Longrightarrow \alpha^2 < \alpha$
Donc, α^2 est un élément de $]]0;1[[$ tel que $\alpha^2 < \alpha$, ce quui contredit le fait que α soit le plus petit élément de $]]0;1[[$.
Donc, l'intervalle $]]0;1[[$ est vide

Remarque 4 :

1. Il résulte du lemme 2.1.4 que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$(0 < x) \Longleftrightarrow (1 \leqslant x)$$

2. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'intervalle $]]n;n+1[[$ qui est vide

   En effet, supposons le contraire, et soit $\alpha \in]]n;n+1[[$; alors $n < \alpha < n+1$ et donc $0 < \alpha - n < 1$, ce qui est impossible. Donc $]]n;n+1[[$ est vide

3. On dit que $n+1 = \sigma(n)$ est le <u>successeur</u> de n
4. De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1$ est le <u>prédécesseur</u> de n.

2.1.5 Théorème

Tout intervalle <u>non vide</u> de $\mathbb{N}$ est de la forme :
- $[[a;b]]$ **s'il est majoré**
- $[[a;+\infty[[$ **s'il n'est pas majoré**