2.2 Le raisonnement par récurrence

2.2.1 Théorème

Toute partie $X \subset \mathbb{N}$ telle que :

1. $0 \in X$
2. $(\forall x \in X)\,(x+1 \in X)$

est identique à $\mathbb{N}$

Démonstration

Soit $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Nous allons montrer que $Y = \emptyset$
Supposons le contraire, c'est à dire $Y \neq \emptyset$; alors, d'après 2.1.2, Y admet un plus petit élément $p \in Y$. Comme $0 \in X$, nous avons $p \neq 0$, c'est à dire $p > 0 \Longleftrightarrow p \geqslant 1$. p admet donc un prédécesseur $p - 1 = p'$. Nous avons $p' \notin Y$, donc $p' \in X$, et donc, d'après les propriétés de X, $p' + 1 \in X$. or $p' + 1 = p$ et donc $p \in X$; il y a donc contradiction.
L'hypothèse $Y \neq \emptyset$ est donc fausse et $Y = \emptyset$

2.2.2 Théorème : le raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$.
Si nous avons :

1. $\mathcal{P}(0)$ **vraie**
2. **La proposition :**$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ **vraie**

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\mathcal{P}(n))$ **est vraie**

Démonstration

Soit $X = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathcal{P}(n) \text{ soit vraie}\}$. Nous devons montrer que $X = \mathbb{N}$, et pour ce faire, nous allons montrer que X vérifie les conditions de 2.2.1

— Tout d'abord, $0 \in X$
— D'autre part, d'après la définition de la propriété, si $n \in X$, alors $n + 1 \in X$

Nous en déduisons donc, d'après 2.2.1 que $X = \mathbb{N}$

2.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$.
Si nous avons :

1. **Supposons qu'elle soit vraie pour un entier** $p \in \mathbb{N}$ **c'est à dire que** $\mathcal{P}(p)$ **est vraie**
2. **Supposons que la proposition :**$(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant p)\,(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ **soit vraie**

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant p)\,(\mathcal{P}(n))$ **est vraie**

Démonstration

Soit $X_p = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathcal{P}(n+p) \text{ soit vraie}\}$. Nous devons montrer que $X_p = \mathbb{N}$, et pour ce faire, nous allons montrer que X vérifie le théorème 2.2.1.

— Tout d'abord, $0 \in X$
— D'autre part, d'après la définition de la propriété, si $n \in X$, alors $n + 1 \in X$

Nous en déduisons donc, d'après 2.2.1 que $X_p = \mathbb{N}$, et donc, pour tout $n \geqslant p$, $(\mathcal{P}(n))$ est vraie

Exemple 1 :

Nous allons donner, ici, quelques exemples du raisonnement par récurrence.

1. **On considère l'application f suivante :**

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & f\left[(x,y)\right] = \dfrac{(x+y)\,(x+y+1)}{2} + y \end{array}\right.$$

Il faut montrer que f est surjective.

Soit $A = f\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right)$. Si f est surjective, alors $A = \mathbb{N}$. pour montrer que $A = \mathbb{N}$, nous allons utiliser les axiômes de récurrence.

(a) Tout d'abord, $0 \in A$, parce que $f\left[(0,0)\right] = \dfrac{(0+0)\,(0+0+1)}{2} + 0 = 0$

(b) Supposons $n \in A$, et démontrons que $n+1 \in A$

Si $n \in A$, il existe alors $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $f\left[(x,y)\right] = n$

— Si $x \geqslant 1$, alors $f\left[(x-1,y+1)\right] = \dfrac{(x-1+y+1)\,(x-1+y+1+1)}{2} + y + 1 = \dfrac{(x+y)\,(x+y+1)}{2} + y + 1 = n+1$

— Si $x = 0$, nous avons alors $f\left[(0,y)\right] = n$, c'est à dire $\dfrac{y\,(y+1)}{2} + y = n$. Alors :

$$\begin{array}{rl} f\left[(y+1,0)\right] & \dfrac{(y+1)\,(y+2)}{2} \\ = & \dfrac{y\,(y+1)}{2} + \dfrac{(y+1)\,2}{2} \\ = & \dfrac{y\,(y+1)}{2} + y + 1 \\ = & \left(\dfrac{y\,(y+1)}{2} + y\right) + 1 \\ = & n+1 \end{array}$$

Donc, $n+1 \in A$

Donc, $A = \mathbb{N}$, et f est surjective

2. **Montrer que, pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a + 7b$**

— Si $n = 24$, nous avons : $24 = 5\times 2 + 7\times 2$. La propriété est donc vraie pour $n_0 = 24$

— Supposons que, pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a + 7b$

Alors, en remarquant que $1 = 15 - 14$, nous avons :

$$n + 1 = 5a + 7b + 15 - 14 = 5\,(a+3) + 7\,(b-2)$$

Nous venons donc de montrer que pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a+7b$

3. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \notin \mathbb{N}$**

Pour simplifier les notations, nous écrivons : $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Nous pouvons remarquer que $U_2 = \dfrac{3}{2}$, que $U_3 = U_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. Ces différents calculs laissent penser que U_n est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.

Nous allons montrer que, pour tout n entier tel que $n \geqslant 2$,U_n est le quotient d'un nombre impair sur un nombre pair, c'est à dire que $U_n = \dfrac{2p+1}{2q}$ où p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.

(a) **Nous l'avons vérifié pour $n = 2$, et même $n = 3$**

(b) **Supposons que jusqu'au rang n, $U_n = \dfrac{2p+1}{2q}$**

(c) **Démontrons que nous avons le même résultat à l'ordre** $n+1$

— Si n est pair, c'est à dire $n = 2m$, alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} = & \quad U_n + \frac{1}{2m+1} \\ = & \quad \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{2m+1} \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\ = & \quad \frac{(2m+1)(2p+1)+2q}{2q(2m+1)} \\ = & \quad \frac{2p(2m+1)+(2m+1)+2q}{2q(2m+1)} \\ = & \quad \frac{2(p(2m+1)+m+q)+1}{2q(2m+1)} \end{aligned}$$

L'écriture de U_{n+1} est bien du type $U_{n+1} = \dfrac{2p'+1}{2q'}$

— Si n est impair, c'est à dire $n = 2m-1$, alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} = & \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m} \\ = & \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right) \\ & \quad \text{(On a regroupé les termes de rang pair et ceux de rang impair} \\ = & \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right) \\ = & \quad \frac{1}{2} \times \frac{2p+1}{2q} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}\right) \text{ (Hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Or, $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2m-1}$ est une somme de fractions dont le dénominateur est impair. Le résultat est donc une fraction de dénominateur impair. Nous pouvons donc écrire :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1} = \frac{p'}{2q'+1}$$

Nous avons donc, et tous calculs faits :

$$U_{n+1} = \frac{2p+1}{4q} + \frac{p'}{2q'+1} = \frac{2(p(2q'+1+2p'q+p)+1)}{4q(2q'+1)}$$

qui est donc le rapport d'un nombre impair sur un nombre pair.

En conclusion, on peut donc dire que $U_n \notin \mathbb{N}$

Remarque 5 :

Suivent, ici, des remarques très importantes.

1. **Le raisonnement par récurrence comporte 2 étapes**
   (a) Vérifier que la formule est vraie pour le premier indice n_0
   (b) Démontrer que la propriété est héréditaire, c'est à dire, démontrer que si la propriété P est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; en fait, on démontre que l'implication $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie
   On peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
2. **Exemples de raisonnements par récurence**
   (a) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n - 6$. Donner les valeurs de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
      i. Premièrement, dans cet exercice, nous ne connaissons pas la valeur demandée, mais des calculs successifs tendent à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3$

ii. Nous appellerons donc $P(n)$, la propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$: $P(n): \ U_n = 3$

iii. **Première étape du raisonnement par récurrence, la vérification :**
Vérifions donc que $P(n)$ est vraie pour le premier terme, c'est à dire vérifions que $P(0)$ est vraie ; or, $U_0 = 3$ et donc $P(0)$ est vraie ;

iv. **Supposons maintenant que $P(n)$ est vraie**
C'est à dire supposons que $U_n = 3$

v. **Démontrons que $P(n+1)$ est vraie**
Nous avons supposé $U_n = 3$, et donc, $U_{n+1} = 3U_n - 6 = 3 \times 3 - 6 = 3$

vi. Nous venons donc de montrer que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie

vii. On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3$

(b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 6$

i. Cette fois ci, dans cet exercice, nous connaissons la propriété à démontrer

ii. Nous appellerons donc $\mathcal{Q}(n)$, la propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{Q}(n): \ v_n < 6$

iii. **Première étape du raisonnement par récurrence, la vérification :**
Vérifions donc que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour le premier terme, c'est à dire vérifions que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ; or, $v_0 = -2 < 6$ et donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ;

iv. **Supposons maintenant que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie**
C'est à dire supposons que $v_n < 6$

v. **Démontrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie**
Nous avons supposé $v_n < 6$, et donc, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 3 < \dfrac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$; donc,$\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie

vi. Nous venons donc de montrer que l'implication $\mathcal{Q}(n) \Longrightarrow \mathcal{Q}(n+1)$ est vraie

vii. On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 6$

3. **Important** Une démonstration par récurrence exige la connaissance préalable de l'énoncé.
4. **Important** Une démonstration par récurrence ne s'impose pas toujours, par exemple :

Soit $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k - 1$ *; montrer que, pour* $n \geqslant 1$, $A_n = n^2$, *par récurence, et par une autre méthode.*

(a) **Première méthode : par récurrence :**

— On vérifie pour $n = 1$: $A_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} 2k - 1 = 1 = 1^2$. La propriété est vraie au rang 1

— Supposons $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

— Démontrons que $A_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 2k - 1 = (n+1)^2$

Nous avons :

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1) - 1)$$

Or, par hypothèse de récurrence *(la supposition)*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = & \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ = & \ n^2 + (2(n+1)-1) \\ = & \ n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

On vient donc de montrer l'implication :

$$(P(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow ((\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0) \Rightarrow P(n))$$

et on peut donc en déduire que :

$$(P(1) \text{ et } (n \geq 1)(P(n) \Rightarrow P(n+1))))$$

C'est à dire :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

(b) **Une autre méthode que la récurrence :**

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k) - \sum_{k=1}^{n}(1) = 2\sum_{k=1}^{n}(k) - n$$

Or, ce que tout le monde doit savoir (!!), c'est que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

5. **Troisième remarque importante**
Il est très important de vérifier que la propriété est vraie pour le premier terme : tous les "pas" du raisonnement par récurrence sont essentiels
Exemple :
Posons $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$*. On appelle* $P(n)$ *:* $S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$*. Montrer que nous avons* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *; avons-nous* $P(0)$ *?*
Supposons donc $P(n)$: $S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$; alors,

$$\begin{aligned} S_{n+1} & = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n + (n+1) \\ & = S_n + (n+1) \\ & = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + (n+1) \\ & = \frac{1}{2}\left(n^2 + n + \frac{1}{4} + 2n + 2\right) \\ & = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + \frac{9}{4}\right) \\ & = \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 \\ & = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Par contre, nous n'avons pas $P(0)$; l'affirmation $S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ est donc fausse.

2.2.4 Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 4 :

Montrer que, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$; la récurrence est-elle nécessaire ?

Exercice 5 :

Ces questions tournent autour des puissances de 2

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5 \Longrightarrow 2^n > n^2$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n!$

Exercice 6 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35} \end{array} \right.$
Montrer que cette suite est positive et majorée par 7 ; en déduire qu'elle est croissante.

Exercice 7 :

Soit $P(n)$ la propriété suivante :
$P(n)$: $10^n + 1$ est divisible par 9
Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$; la propriété est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 8 :

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
La récurrence était-elle nécessaire ? *(penser à décomposer* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Exercice 9 :

Etablir que$n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 10 :

1. Démontrer par récurrence que

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2. En déduire

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   (c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 11 :

Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6