2.3 Ensembles finis, cardinal d'un ensemble

Dans cette partie, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n, c'est à dire

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n\} = [[1; n]]$$

2.3.1 Relation d'équipotence

Soient E et F 2 ensembles. On dit que E et F sont équipotents si et seulement si il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$
La relation d'équipotence est une relation d'équivalence

Démonstration

* **Elle est réflexive**
  En effet, un ensemble E est équipotent à lui même. Il suffit de considérer la bijection $f = \mathrm{Id}_E$
* **Elle est symétrique**
  En effet, soient E et F deux ensembles équipotents ; il existe alors une bijection $f : E \longrightarrow F$. La bijection réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ montre que F et E sont équipotents
* **Elle est transitive**
  En effet, soient E, F 2 ensembles équipotents, F et G 2 autres ensembles équipotents.
  — Il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$ et il existe une bijection $g : F \longrightarrow G$
  — La composée des deux bijections $g \circ f : E \longrightarrow G$ est aussi une bijection
  Donc, E et G sont équipotents.

2.3.2 Définition d'ensemble fini

Un ensemble E est dit fini :
- **S'il est vide**
- **S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n$**

L'entier n est appelé cardinal de E et est noté $n = \mathrm{Card}\ E$
La définition est complétée en posant $\mathrm{Card}\ \emptyset = 0$
Un ensemble qui n'est pas fini est donc dit infini

Remarque 6 :

1. Le cardinal d'un ensemble est donc **le nombre de ses éléments**
2. Il y a une autre notation pour le cardinal : $\sharp E = \mathrm{Card}\ E$
3. Soit E un ensemble fini de cardinal$n$ et $\varphi : \mathbb{N}_n \longrightarrow E$. L'élément $\varphi(k)$ de E porte le numéro k ; on utilise souvent la notation indicielle $x_k \in E$ *(notion de suite finie)*, c'est à dire que si $n = \mathrm{Card}\ E = \sharp(E)$, alors $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
4. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des exemples d'ensembles infinis

Exemple 2 :

Soit $A = \{1; 3; 7; 14; 23\}$, on a alors $\mathrm{Card}\ (A) = 5$.

2.3.3 Proposition admise

1. **Soit E un ensemble fini et $F \subset E$ une partie de E. Alors, F est un ensemble fini**
2. **Soit A et B deux ensembles finis disjoints, on a alors :**

$$\boxed{\mathrm{Card}\ (A \cup B) = \mathrm{Card}\ (A) + \mathrm{Card}\ (B)}$$

Remarque 7 :

On dit : ≪ Un sous-ensemble d'un ensemble fini est fini ≫

Exercice 12 :

1. Soit E un ensemble fini et A un ensemble quelconque. Montrer que $A \cap E$ est fini.
2. Soient A et B deux ensembles tels $A \subseteq B$, démontrer que nous avons : Card $(B \setminus A) =$ Card $(B) -$ Card (A).
3. Déduire de la question précédente que si $A \subseteq B$, alors Card $A \leqslant$ Card B
4. Soit A et B deux ensembles finis donner montrer que : Card $(A \setminus B) =$ Card $(A) -$ Card $(A \cap B)$

2.3.4 Propriété

Soit A et B deux ensembles finis, on a alors :

$$\boxed{\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A) + \text{Card } (B) - \text{Card } (A \cap B)}$$

Démonstration

Pour bien comprendre cette démonstration, il ne faut surtout pas hésiter à faire des schémas

1. Nous avons : $E \cup F = (E - (E \cap F)) \cup (F - (E \cap F)) \cup (E \cap F)$, et ces différents ensembles ont une interection vide , donc,

$$\text{card } (E \cup F) = \text{card } ((E - (E \cap F))) + \text{card } ((F - (E \cap F))) + \text{card } ((E \cap F))$$

2. Or, $E = (E \cap F) \cup (E - (E \cap F))$, donc, card $E =$ card $((E \cap F)) +$ card $((E - (E \cap F)))$, d'où card $E -$ card $((E \cap F)) =$ card $((E - (E \cap F)))$
3. De même, card $F -$ card $((E \cap F)) =$ card $((F - (E \cap F)))$;

d'où, en remplaçant, on obtient le résultat.

Exercice 13 :

Les questions de cet exercices sont totalement indépendantes *(et même, pour certaines, se répètent ! !)*

1. Généraliser le résultat précédent aux cas de trois ensembles, puis au cas de quatre ensembles.
2. Une station de radio diffuse les mêmes publicités à 15h00 et à 16h00. D'après un sondage, on sait qu'il y a 21 400 auditeurs à 15h00 et 24 800 à 16h00. Combien de personnes différentes ont entendu ces publicités ?
3. Le marché d'une certaine presse est composée de trois titres A, B et C. Nous savons que :
   — 30% de la population lit la revue A.
   — 40% de la population lit la revue B.
   — 5% de la population lit les trois revues.
   — 15% de la population lit les revues A et B, mais ne lit pas la revue C.
   Quel pourcentage de la population ne lit que la revue C ?
   (a) Si l'on suppose que les personnes qui ont écouté la radio à 15h00 ne l'écoutent plus à 16h00
   (b) Si on suppose que 4600 auditeurs écoutent à 15h00 et à 16h00