2.4 Applications entre ensembles finis

2.4.1 Applications entre ensembles finis

Soient E et F, 2 ensembles finis non vides, de même cardinal n, et f, une application de E dans F Alors, f est injective, si et seulement si f est surjective.

Démonstration

1. **Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective**
   Alors, si $x_i \neq x_j$,et puisque f est injective, nous avons $f(x_i) \neq f(x_j)$ et donc tous les $f(x_i) \ldots f(x_i) \ldots f(x_n)$ sont tous différents et $\text{Card } f(E) = n$, et donc $f(E) = F$ et f est surjective.
2. **Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective**
   On note, pour simplifier $F = \{y_1, \ldots, y_n\}$ et $E_i = \{x \in E \text{ tq } f(x) = y_i\} = f^{-1}(\{y_i\})$.
   (a) Alors $\text{Card } E_i \geqslant 1$; en effet, f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y_i$, et donc $x \in E_i$
   (b) Soient $i \neq j$, c'est à dire $y_i \neq y_j$ et $x \in E_i \cap E_j$; Alors $f(x) = y_i$ et $f(x) = y_j$, ce qui est impossible, car $y_i \neq y_j$; donc $E_i \cap E_j = \emptyset$
   (c) Nous avons $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \subset E$, et donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \leqslant n$; comme, pour chaque i, $\text{Card } E_i \geqslant 1$, nous avons aussi $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \geqslant n$, c'est à dire $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card } E_i = n$, et donc, comme nous sommes dans un ensemble fini, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = E$
   (d) Montrons que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\text{Card } E_i = 1$; supposons le contraire, et que donc, il existe i_0 tel que $\text{Card } E_{i_0} > 1$, c'est à dire $\text{Card } E_{i_0} \geqslant 2$; alors, $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card } E_i > n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\sum\limits_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \leqslant n$
   Donc, pour tout $i = 1 \ldots n$, $\text{Card } E_i = 1$; donc, f est injective.

2.4.2 Propriété

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{Card } E = n$ et $\text{Card } F = p$, alors :

$$\text{Card } E \times F = \text{Card } E \times \text{Card } F = np$$

Démonstration

On considère l'application « Première projection » Pr :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & Pr[(x, y)] = x \end{array} \right.$$

1. Nous considérons la relation $\mathcal{R}$ définie sur $E \times F$ par :
   $$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1) \Longleftrightarrow Pr[(x, y)] = Pr[(x_1, y_1)]$$
   $\mathcal{R}$ est de manière évidente une relation d'équivalence.
2. Pour $x \in E$, on appelle $E_x = \{(a, b) \in E \times F \text{ tel que } Pr[(a, b)] = x\}$
   E_x est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Donc, $x \neq x' \Longrightarrow E_x \cap E_{x'} = \emptyset$ et $\bigcup\limits_{x \in E} E_x = E \times F$
   Tous les couples de E_x sont de la forme (x, b) où $b \in F$, et donc $\text{Card } E_x = \text{Card } F$

3. Nous en déduisons donc que $\sum_{x \in E} \text{Card } E_x = \text{Card } (E \times F)$, c'est à dire $\sum_{x \in E} \text{Card } F = \text{Card } (E \times F)$, et donc Card $E \times$ Card $F =$ Card $(E \times F)$

2.4.3 Nombre d'applications entre ensembles finis

Soient E et F, 2 ensembles finis non vides. $\mathcal{F}(E,F)$ est l'ensemble des applications de E dans F ; on note souvent $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ Alors, $\text{Card } \mathcal{F}(E,F) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$
Plus simplement, si $\text{Card } F = p$**, et si** $\text{Card } E = n$**, alors,**

$$\boxed{\text{Card } \mathcal{F}(E,F) = \text{Card } F^E = (p)^n}$$

Démonstration

Soient $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de cardinal n et $F = \{y_1, \ldots, y_p\}$ un ensemble fini de cardinal p
Pour $f \in F^E$, f est entièrement déterminée par la donnée de $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.
On considère une application ψ définie par :

$$\begin{cases} \psi : F^E & \longrightarrow & F^n \\ \quad f & \longmapsto & (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \end{cases}$$

Nous allons montrer que ψ est bijective

1. **ψ est surjective**
   En effet, soit $(y_1, \ldots, y_n) \in F^n$; la correspondance f telle que, pour tout $i = 1 \ldots n$ fait correspondre à x_i y_i, c'est à dire telle que $f(x_i) = y_i$; c'est une application de E dand F, et il existe donc $f \in F^E$, telle que $\psi(f) = (y_1, \ldots, y_n)$
2. **ψ est injective**
   Soient $f \in F^E$ et $g \in F^E$ tels que $\psi(f) = \psi(g)$; alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(x_i) = g(x_i)$, ce qui montre bien que $f = g$

ψ est donc bijective, et Card $F^E =$ Card $F^n = p^n$

Exemple 3 :

On prend $E = \{a, b\}$, et $F = \{x, y, z\}$; le nombre d'applications de E dans F est donc de 9 ; on peut en donner des exemples :
$\begin{pmatrix} a \to x \\ b \to y \\ \quad z \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to x \\ b \to z \\ \quad y \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to y \\ b \to x \\ \quad z \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to y \\ b \to z \\ \quad x \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to z \\ b \to x \\ \quad y \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to z \\ b \to y \\ \quad x \end{pmatrix}$ ce sont des injections, et il manque : $(a \to x)$ et $(b \to x)$, y et z n'ayant pas d'antécédent etc. . . .
On arrive ainsi à 9 applications

Exercice 14 :

Dans un département donné, le service d'immatriculation de la préfecture attribue à chaque véhicule automobile un numéro minéralogique comprenant au plus 4 chiffres et 3 lettres ; combien y-a-til de numéros possibles, en supposant qu'il n'y a aucun numéro ou assemblage de lettres réservés ?

Exercice 15 :

Soit E un ensemble à n éléments, et A une partie de E. On appelle fonction caractéristique de A, une application notée 1_A de E dans l'ensemble $\{0,1\}$ ainsi définie :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

1. Montrer que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$
2. Montrer que $1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$
3. Définir les applications $1_\emptyset$ et 1_E
4. Soit $f : E \to \{0,1\}$; démontrer qu'il existe $A \subset E$ tel que $f = 1_A$
5. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ; montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F} = \{0,1\}^E$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$ sont équipotents.
6. En déduire que, lorsque E est fini et de cardinal n, $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$

2.4.4 Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et

$$\boxed{\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n}$$

Démonstration

La démonstration est donnée dans l'exercice précédent.

2.4.5 Nombre d'injections de E dans F, où E et F sont finis

E et F sont deux ensembles finis ; on sait que $\operatorname{Card} E = p$ et $\operatorname{Card} F = n$ avec $p \leqslant n$; on note A_n^p le nombre d'injections de E dans F. Alors,

$$\boxed{\mathrm{A}_n^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

Démonstration

On appelle $\mathcal{I}$ l'ensemble des injections de E dans F

1. **On montre que $\mathcal{I}$ est un ensemble fini**
   L'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini de cardina n^p ; comme $\mathcal{I} \subset F^E$, $\mathcal{I}$ est donc fini ; nous avons le résultat
2. **Si il existe f injection de E dans F, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$**
   Soit f une injection de E dans F ; alors, f est une bijection de E sur $f(E)$, et $f(E) \subset F$, donc $\operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$; comme $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E)$, nous avons bien $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$
   Ainsi, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$, il n'y a pas d'injection possible.
3. **Supposons maintenant $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$**
   Soit $p = \operatorname{Card} E$, et $n = \operatorname{Card} F$; on a donc $p \leqslant n$; appelons $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Construisons une injection de E dans F.

$$\begin{cases} f(x_1) \in F \\ f(x_2) \in F - \{f(x_1)\} \\ f(x_3) \in F - \{f(x_1), f(x_2)\} \\ \vdots \\ f(x_p) \in F - \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{p-1})\} \end{cases}$$

Le choix de $f(x_1)$ se fait de n façons, celui de $f(x_2)$ de $n-1$ façons, et celui de $f(x_p)$ de $n-(p-1)$ façons.
Il y a donc $n(n-1)\dots(n-(p-1)) = \mathrm{A}_n^p$ choix possibles.

Remarque 8 :

1. Dans les problèmes d'ordre, il y a toujours une injection ; par exemple, le nombre d'arrivées du tiercé dans l'ordre *(cf. remarque infra)*
2. Dans l'exemple 2.4.3 ci-dessus : $E = \{a, b\}$, et $F = \{x, y, z\}$, le nombre d'injections est 6 et $6 = \mathrm{A}_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!}$

2.4.6 Nombre de bijections de E dans E

E est un ensemble fini de cardinal n ; il y a $n!$ bijections de E dans E

Démonstration

Une bijection est une injection particulière ; c'est une injection d'un ensemble à n éléments dans un autre ensemble à n éléments ; il y a donc $\mathrm{A}_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ bijections de E dans E

Exercice 16 :

On considère une cordée formée de 6 alpinistes x, y, z, t, u, v, indiscernables les uns des autres. Une cordée est une file où on distingue un ordre de marche.

1. Combien y-a-t-il de cordées possibles sachant que les 6 alpinistes sont tous aussi capables les uns que les autres d'être premier de cordée ?
2. Même question, sachant que, seul x est capable d'être premier de cordée
3. Même question sachant que x et y et eux seuls sont capables d'être premier de cordée
4. Combien y-a-t-il de cordées possibles, sachant que, seul x peut être premier de cordée, y et z étant les seuls à pouvoir être dernier de cordée.

2.4.7 Définition d'arrangement

Soit E un ensemble.
On appelle arrangement, sans répétition d'ordre p dans E, toute injection de $\mathbb{N}_p = \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } 1 \leqslant k \leqslant p\}$ dans E

Remarque 9 :

1. Le nombre d'arrangements d'ordre p dans E est donc A_n^p
2. Dans la notion d'arrangement, il y a **une notion d'ordre**

   Exemple du tiercé : Sur 21 partants, combien y-a-t-il d'arrivées possibles dans l'ordre ?
   Il faut remarquer que, par exemple, l'arrivée $\{21, 19, 18, \}$ est totalement différente de l'arrivée $\{21, 18, 19.\}$
   Donc, si $E = \{1, 2, 3\}$, et F est l'ensemble des chevaux, on s'intéresse au nombre d'injections de E dans F ; il y a donc $\mathrm{A}_{21}^3 = \dfrac{21!}{18!} = 7980$ arrivées possibles dans l'ordre.
3. Soit E un ensemble à n éléments $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. Un arrangement d'ordre p de E peut être considéré comme un p-uplet de E^p $(x_1, \dots, x_p)$ où les composantes (ou coordonnées) sont toutes différentes les unes des autres $(i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$.
   Si $\mathcal{A}_p(E)$ est l'ensemble des arrangements d'ordre p de E, alors $\mathrm{Card}\, \mathcal{A}_p(E) = \mathrm{A}_n^p$

Exemple 4 :

Un cours de probabilités est suivi par 10 personnes : 5 gars et 5 filles. Lors d'un contrôle, les étudiants sont classés par leurs notes, et il est exclu que 2 étudiants aient les mêmes notes.

1. **Combien y-a-t-il de classements possibles ?**
2. **Si les garçons sont classés uniquement entre eux et les filles entre elles, combient de classements globaux pouvons nous avoir ?**

Corrigé

1. Chaque classement correspond à une permutation particulière, il y a donc $10! = 3628800$ classements possibles
2. Dans chaque groupe graçon ou fille, il y a $5! = 120$ classements possibles, c'est à dire $5! \times 5! = (120)^2 = 14400$ classements possibles

Exercice 17 :

Un enfant forme des nombres avec 7 jetons numérotés de 1 à 7. Combien peut-il former de nombres :

1. De 3 chiffres
2. De 7 chiffres
3. Ne comprenant que des chiffres impairs
4. De 7 chiffres, dont le chiffre des unités est supérieur à 5
5. Inférieur à 2000
6. De 7 chiffres, où les chiffre 3,4 et 5 sont consécutifs, dans cet ordre, dans un ordre quelconque.

Exercice 18 :

On appelle "mot" toute permutation de lettres données. Avec les lettres du mot **"BUNGALOW"**, combien peut-on former de mots :

1. De 8 lettres
2. De 8 lettres commençant par deux consonnes
3. De 8 lettres commençant par deux voyelles
4. De 8 lettres commençant et finissant par une voyelle
5. De 8 lettres commençant par une consonne et terminant par une voyelle

2.4.8 Définition

On appelle combinaison sans répétition d'ordre p de E, toute partie de E à p éléments

Exemple 5 :

1. $E = \{a, b, c, d, e\}$ est un ensemble à 5 éléments ; $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, d\}$ sont des combinaisons sans répétitions d'ordre 3 de E ; il faut remarquer que $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, a\}$ est la même combinaison.
2. Les combinaisons sans répétition sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$

Exercice 19 :

Pour $E = \{a, b, c, d, e\}$, donner les combinaisons sans répétition d'ordre 2 de E

2.4.9 Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n ; on appelle $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments.
Autrement dit, $\mathcal{P}_p(E)$ est l'ensemble des combinaisons sans répétition de E.
Alors, le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$ est

$$\boxed{\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \textbf{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \textbf{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

Démonstration

1. **Si** $p > n$

   Il n'existe alors pas de parties à p éléments pris parmi les n, donc $\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = 0$

2. **Si** $p \leqslant n$

   (a) Etudions des cas particuliers

      i. Si $p = 0$, alors, même si E est non vide, $\mathcal{P}_p(E) = \{\emptyset\}$, et donc $\mathrm{C}_n^0 = \binom{n}{0} = 1$

      ii. Si $p = n$, alors $\mathcal{P}_n(E) = \{E\}$, et donc $\mathrm{C}_n^n = \binom{n}{1} = 1 = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!}$

   (b) Supposons $0 < p < n$

   On appelle $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble des arrangements sans répétition de E(cf 2.4.7) ; on sait déjà que Card $\mathcal{A}_p(E) = \mathrm{A}_n^p$

   Soit une application ϕ définie par :

   $$\begin{cases} \phi : \mathcal{A}_p(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_p(E) \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \{x_1, \ldots, x_p\} \end{cases}$$

   Pour $Y = \{x_1, \ldots, x_p\}$ un élément de $\mathcal{P}_p(E)$. Les antécédent de Y par ϕ sont les arrangements de $\mathcal{A}_p(E)$ qui contiennent les éléments $\{x_1, \ldots, x_p\}$, donc Card $\phi^{-1}(Y) = p!$

   On peut alors écrire $\mathcal{P}_p(E) = \{Y_1, \ldots, Y_N\}$ où $N = \mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \text{Card } \mathcal{P}_p(E)$, et si X_j est l'ensemble des antécédents de Y_j, nous avons $\mathcal{A}_p(E) = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$, et comme, si $i \neq j$, alors $X_i \cap X_j = \emptyset$.

   Alors, Card $\mathcal{A}_p(E) = \text{Card } X_1 + \text{Card } X_2 + \ldots + \text{Card } X_N$, c'est à dire $\mathrm{A}_n^p = N \times p!$, et donc $N = \dfrac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$, ce que nous voulions.

Remarque 10 :

Dans la notion de combinaison, **il n'y a pas de notion d'ordre.**

Exemple du tiercé : Sur 21 partants, combien y-a-t-il d'arrivées possibles dans le désordre ?
Il faut remarquer qu'ici, l'arrivée $\{21, 19, 18,\}$ est la même que l'arrivée $\{21, 18, 19.\}$
Donc, une arrivée dans le désordre, est un sous-ensemble de 3 chevaux pris parmi 24 ; il y a donc $\mathrm{C}_{21}^3 = \dfrac{21!}{3!18!} = 1330$ arrivées possibles dans le désordre.

Exercice 20 :

Dans une urne, on a 10 boules numérotées de 1 à 10 indiscernables au toucher. Quel est le nombre de résultats possibles dans chacune des expériences suivantes :

1. On tire "au hasard" 4 boules, successivement, sans les remettre dans l'urne, en tenant compte de l'ordre de sortie
2. On tire "simultanément" 4 boules
3. On tire successivement, 4 boules, en les remettant à chaque fois dans l'urne, en tenant compte de l'ordre de sortie
4. On tire succesivement 4 boules, en les remettant dans l'urne à chaque fois, sans tenir compte de l'ordre de sortie.

Exercice 21 :

Le poste de police de Kercado compte 12 agents. L'organisation de ce poste est :
- D'avoir 5 agents en patrouille dans le quartier
- D'avoir 3 agents assurant l'accueil au poste de police
- D'avoir 4 agents au poste, mais en réserve.

A combien de répartition de ces agents en 3 groupes, pouvons nous procéder ?

2.4.10 Coefficient binômial

On appelle coefficient binômial, le nombre :

$$\boxed{\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \textbf{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \textbf{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

2.4.11 Propriétés des coefficients binômiaux

1. **Triangle de Pascal :** $\mathrm{C}_{n+1}^{p+1} = \mathrm{C}_n^{p+1} + \mathrm{C}_n^p$
2. $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$
3. $\mathrm{C}_{n+1}^{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1} \times \mathrm{C}_n^p$
4. **Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**, nous avons :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$

Démonstration

On ne démontre que le résultat 4 ; les autres sont faciles à faire.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. $P(E)$ est aussi la réunion des parties à $0, 1, 2, 3, \dots, n$ éléments.
On appelle $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des parties de E à i éléments
Donc,

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup \cdots \cup \mathcal{P}_n(E)$$

De plus, si $i \neq j$, alors $\mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \emptyset$, donc,

$$\mathcal{P}(E) = \mathrm{card}\mathcal{P}_0(E) + \mathrm{card}\mathcal{P}_1(E) + \cdots + \mathrm{card}\mathcal{P}_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$$

Comme, $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$, nous avons le résultat.

2.4.12 Binôme de Newton

Dans un anneau commutatif $(\mathcal{A}, +, \times)$**, pour** $a \in \mathcal{A}$ **et** $b \in \mathcal{A}$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k}$$

Remarque 11 :

1. Cette propriété vraie dans tout anneau commutatif, l'est, en particulier, dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
2. Cette formule n'est valable **que dans un anneau commutatif** ; en effet, dans un anneau non commutatif, $ab \neq ba$, et nous avons : $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$, car $ab + ba \neq 2ab$
3. C'est ce qui se passe dans le calcul matriciel où la multiplication n'est pas commutative. Par contre, si les matrices A et B commutent, nous avons l'égalité 2.4.12

Démonstration

La démonstration de la formule du binôme va se faire **par récurrence sur** n

1. Tout d'abord, elle est vraie pour $n = 1$, car
$$(a+b) = \mathrm{C}_1^0 a + \mathrm{C}_1^1 b = \sum_{k=0}^{1} \mathrm{C}_1^k a^k b^{1-k}$$
2. Supposons la propriété $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ vraie à l'ordre n
3. Démontrons la à l'ordre $n+1$
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$
   (a) Le terme en a^{n+1} est unique, et c'est celui qui est donné par $a \times \left(\mathrm{C}_n^n a^{n+1} b^{n-n}\right) = a \times (\mathrm{C}_n^n a^n)$ que l'on retrouve dans le premier membre, lorsque $k = n$; or,
$$a^{n+1} = a \times \left(\mathrm{C}_n^n a^{n+1}\right) = \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$
   (b) De la même manière, le terme en b^{n+1} est unique, et c'est celui qui est donné par $b \times \left(\mathrm{C}_n^0 a^0 b^{n-0}\right) = b \times \left(\mathrm{C}_n^0 b^{n+1}\right)$ que l'on retrouve dans le second membre, lorsque $k = 0$; or,
$$b^{n+1} = b \times \left(\mathrm{C}_n^0 b^n\right) = \mathrm{C}_{n+1}^0 b^{n+1}$$
   (c) Étudions maintenant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1}$
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$
   car nous avons l'identité $\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n+1}^k$ *(triangle de Pascal)*

En résumé, $(a+b)^{n+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^{k} a^k b^{n+1-k} + \mathrm{C}_{n+1}^{0} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} a^k b^{n+1-k}$

Exercice 22 :

1. Mettre sous forme de polynôme $(1+X)^n$
2. Retrouver le résultat $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k$, $\sum_{k=0}^{n} (2)^k \mathrm{C}_n^k$
4. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \mathrm{C}_n^k$; $\sum_{k=1}^{n} k x^k \mathrm{C}_n^k$
5. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} (k+1) \mathrm{C}_n^k = (n+2) 2^{n-1}$
6. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 \mathrm{C}_n^k$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et p tel que $0 < p < n$; résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - x\mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} \mathrm{C}_{n-1}^{p} = 0$

Exercice 23 :

1. Montrer la relation suivante : $\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{n'}^{k} \mathrm{C}_{n}^{p-k} = \mathrm{C}_{n+n'}^{k}$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = \mathrm{C}_{2n}^{n}$

Exercice 24 :

1. Développer, par la formule du binôme de Newton, les expressions suivantes :

   (a) $(x+1)^{2n}$ (b) $(x-1)^{2n}$ (c) $\left(x^2-1\right)^{2n}$

2. En déduire que la somme :

$$1 - \left(\mathrm{C}_{2n}^{1}\right)^2 + \left(\mathrm{C}_{2n}^{2}\right)^2 - \left(\mathrm{C}_{2n}^{3}\right)^2 + \cdots + (-1)^p \left(\mathrm{C}_{2n}^{p}\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{C}_{2n}^{2n}\right)^2 = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \left(\mathrm{C}_{2n}^{p}\right)^2$$

   est égale à $(-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!}$