2.5 La division et la numération dans $\mathbb{N}$

2.5.1 Propriété d'Archimède

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a < kb$

Démonstration

Soit donc $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Nous avons $(a+1)\,b = ab + b$ et, comme $b \geqslant 1$, $ab + b > ab \geqslant a$
Il existe donc au moins un $k \in \mathbb{N}$ tel que $a < kb$

2.5.2 Théorème : la division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple d'entiers naturels $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\boxed{a = bq + r \text{ ET } 0 \leqslant r < b}$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

1. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $bq \leqslant a < b\,(q+1)$
   Soit $b\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}$ tels que il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = bp\}$. En fait $b\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples entiers positifs de b. Nous appelons A l'ensemble des multiples positifs de b qui sont inférieurs à a. Nous avons donc :
   $$A = b\mathbb{N} \cap [|0, a|]$$
   A est un ensemble majoré, non vide, et admet donc un unique plus grand élément n_0
   - Nous avons donc $n_0 \leqslant a$
   - Et n_0 est un multiple de b ; il existe donc un unique élément $q \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 = bq$

   Nous avons donc $bq \leqslant a < b\,(q+1)$
2. Il existe donc un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$
   De l'inégalité prouvée ci-dessus, $bq \leqslant a < b\,(q+1)$, nous tirons $0 \leqslant a - bq < b$. En posant $r = a - bq$, nous avons bien $a = bq + r$
   L'unicité résulte de l'unicité du plus grand élément.

Remarque 12 :

1. En fait $b\mathbb{N}$ est un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ et qui ne possède pas de plus grand élément
2. **Vocabulaire**
   — a est le dividende
   — b est le diviseur
   — q est le quotient
   — r est le reste
3. Si $r = 0$, alors $a = bq$ et on dit que a est divisible par b ou que b est un diviseur de a
4. La division par zéro n'a aucun sens

Exemple 6 :

Trouver **tous les couples** $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $x + 4y = 35$

L'équation $x + 4y = 35$ d'inconnues x et y peut être vue comme la division euclidienne de 35 par 4. Et alors, on obtient comme premier couple solution $(3, 8)$.
Seulement, y-a-t-il unicité des solutions. En fait non ; nous avons plusieurs solutions :

— $(x, y) = (35, 0)$
— $(x, y) = (31, 1)$
— $(x, y) = (27, 2)$
— $(x, y) = (23, 3)$
— $(x, y) = (19, 4)$
— $(x, y) = (15, 5)$
— $(x, y) = (11, 6)$
— $(x, y) = (7, 7)$
— $(x, y) = (3, 8)$

Il n'y a donc qu'un seul couple (x, y) tel que le reste x soit tel que $0 \leqslant x < 4$

2.5.3 Quelques exercices sur la division

Exercice 25 :

Une division euclidienne a pour dividende 557 et pour reste 85. Déterminer les valeurs acceptables pour le reste et le quotient

Exercice 26 :

On augmente le dividende d'une division eucvlidienne de 52 et le diviseur de 4. On constate alors que le quotient et le reste ne changent pas. Calculer le quotient.

Exercice 27 :

1. Trouver tous les nombres entiers compris entre 1000 et 2000 qui, divisés par 127 donnent un quotient égal au reste
2. Trouver tous les entiers qui, divisés par 12, donnent un quotient égal au reste

Exercice 28 :

Soient q et r deux entiers qui sont respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b. Quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas ; comparez alors q et r. Etudiez la réciproque.

Exercice 29 :

Déterminer le plus grand nombre entier que l'on peut ajouter au dividende d'une division euclidienne sans en modifier le quotient

2.5.4 Numération suivant une base b

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$; on suppose $b > 1$
Définition
On appelle décomposition de a dans le système de numération à base b, une expression de la forme :

$$a = \alpha_n b^n + \alpha_{n-1} b^{n-1} + \cdots + \alpha_1 b + \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k$$

Où, pour tout $i = 0, \ldots, n$, nous avons $\alpha_i \in \mathbb{N} \cap [0, b-1]$ et $\alpha_n \neq 0$
On écrit souvent : $a = \overline{(\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)}_b$
Théorème
Cette décomposition existe et est unique

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $b > 1$

1. Si $a = 0$, alors $0 = 0 \times b + 0$ et $0 = \overline{(0)}_b$
2. Supposons, maintenant $a > 0$
   De la division euclidienne de a par b, il existe un unique couple (q_0, r_0) tel que

$$a = bq_0 + r_0 \text{ avec } 0 \leqslant r_0 < b$$

(a) Si $a < b$, alors $q_0 = 0$ et $r_0 = a$, et a s'écrit dans la base b :$a = \overline{(a)}_b$

(b) Si $a \geqslant b$, alors $q_0 \neq 0$ et $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 \leqslant b - 1$
Et on fait la division de q_0 par b : $q_0 = bq_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < b$
- ▷ Si $q_0 < b$, alors $q_1 = 0$ et $r_1 = q_0$. Nous avons alors $a = r_1 b + r_0$, et alors, pour reprendre les termes de l'énoncé, $\alpha_0 = r_0$ et $\alpha_1 = r_1$; on peut donc écrire $a = \overline{(\alpha_1\alpha_0)}_b$
- ▷ Si $q_0 \geqslant b$, alors q_1 est non nul et recommence en divisant q_1 par b

(c) Nous avons alors : $q_1 = q_2 b + r_2$
- ▷ Si $q_1 < b$, alors $q_2 = 0$ et $q_1 = r_2$, d'où $q_0 = r_2 b + r_1$, et alors :
$$a = b\,(r_2 b + r_1) + r_0 = r_2 b^2 + r_1 b + r_0$$
Nous avons donc $\alpha_0 = r_0$, $\alpha_1 = r_1$ et $\alpha_2 = r_2$ et donc : $a = \overline{(\alpha_2\alpha_1\alpha_0)}_b$
- ▷ Si $q_1 \geqslant b$, alors q_2 est non nul et on divise q_2 par b
- ▷ ....Et on continue ainsi de suite

(d) **Question :** quand est-ce que cela va-t-il s'arrêter ?
Au rang k, nous avons : $q_{k-1} = bq_k + r_k$ où $0 \leqslant r_k < b$.
Nous mettons donc ainsi en évidence une suite : $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$
- ▷ **Démontrons que cette suite** $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$ **est décroissante**, c'est à dire que nous avons $q_k < q_{k-1}$
Nous avons $1 < b$ et donc
$$q_k < bq_k \leqslant bq_k + r_k = q_{k-1}$$
Donc $q_k < q_{k-1}$
- ▷ Comme la suite $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$ est une suite d'entiers décroissante, il existe donc un indice n tel que $q_n < b \leqslant q_{n-1}$... Et on arrête la division.

(e) **Récapitulons**
$$\begin{array}{rcl}
a = bq_0 + r_0 & \iff & a = bq_0 + r_0 \\
q_0 = bq_1 + r_1 & \iff & q_0 b = q_1 b^2 + r_1 b \\
q_1 = bq_2 + r_2 & \iff & q_1 b^2 = q_2 b^3 + r_2 b^2 \\
q_2 = bq_3 + r_3 & \iff & q_2 b^3 = q_3 b^4 + r_3 b^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
q_{k-1} = bq_k + r_k & \iff & q_{k-1} b^k = q_k b^{k+1} + r_k b^k \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
q_{n-1} = bq_n + r_n & \iff & q_{n-1} b^n = q_n b^{n+1} + r_n b^n
\end{array}$$
....Tout en rappelant que nous avons $q_n < b$.
En additionnant membres à membres, nous obtenons :
$$\begin{array}{rl}
a + q_0 b + q_1 b^2 + \cdots + q_{n-2} b^{n-1} + q_{n-1} b^n = & \left(q_0 b + q_1 b^2 + \cdots + q_{n-2} b^{n-1} + q_{n-1} b^n\right) \\
& + \left(r_0 + r_1 b + \cdots + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n + q_n b^{n+1}\right)
\end{array}$$
Et donc :$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n + q_n b^{n+1}$, de telle sorte que :
$$\alpha_0 = r_0,\ \alpha_1 = r_1\ \cdots\ \alpha_n = r_n\ \alpha_{n+1} = q_n$$
Et donc, $a = \overline{(q_n r_n r_{n-1} \cdots r_1 r_0)}_b$
L'unicité du développement étant obtenue par l'unicité des restes r_i dans les divisions successives

Exemple 7 :

Ecrire dans la base « huit » le nombre écrit dans la base « dix » 2282

On utilise la méthode exposée dans la démonstration
$$\begin{array}{rl}
2282 = & (285) \times 8 + 2 \\
285 = & (35) \times 8 + 5 \\
35 = & (4) \times 8 + 3
\end{array}$$
Donc $2282 = 4 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2$ et nous avons $\overline{(2282)}_{10} = \overline{(4352)}_8$

Remarque 13 :

1. Pour écrire un nombre a dans une base b, il faut adopter une convention. La convention adoptée est d'utiliser <u>les chiffres arabes</u> représentant chacun l'un des entiers de l'ensemble $[0, b-1] \cap \mathbb{N}$.
2. Dans la base b, on écrit $a = \overline{(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0)_b}$, ce qui signifie que
$$a = \alpha_0 + \alpha_1 b + \cdots + \alpha_n b^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k$$
3. Dans l'exemple de la base « huit » les chiffres utilisés sont $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
4. Si la base est supérieure à 10, on utilise des lettres. Dans la base 16 *(la base hexadécimale des informaticiens)* on utilise des lettres. En base 16, nous avons donc comme chiffres :
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$
5. Bien entendu, dans la vie courante *(et les mathématiques courantes !!)*, on omet de préciser la base *(qui est la base « 10 »)* et on utilise les chiffres de 0 à 9.

Exemple 8 :

En base b, le nombre b est représenté par $\overline{(10)_b}$ et le nombre b^2 est représenté par $\overline{(100)_b}$

2.5.5 Exercices sur la numération

Exercice 30 :

Ecrire en base 10, les nombres entiers suivants :

1. $\overline{(101010011100)_2}$
2. $\overline{(125023712)_8}$
3. $\overline{(AE1259D)_{16}}$

Exercice 31 :

Convertir dans les bases, 2,3,8 et 16, les nombres 33, et 256 tous deux écrits en base 10

Exercice 32 :

1. Convertir en **binaire** les nombres suivants :
   (a) $\overline{(145)_8}$
   (b) $\overline{(47306)_8}$
   (c) $\overline{(300257102)_8}$
   (d) $\overline{(145)_{16}}$
   (e) $\overline{(AE65B72)_{16}}$
2. Convertir en octal les nombres suivants :
   (a) $\overline{(111111)_2}$
   (b) $\overline{(100101010001)_2}$
   (c) $\overline{(111111)_2}$
   (d) $\overline{(1100110011)_2}$
   (e) $\overline{(A)_{16}}$
3. Convertir en hexadécimal les nombres suivants :
   (a) $\overline{(1001011101)_2}$
   (b) $\overline{(1111000011110001110011 1)_2}$

Exercice 33 :

Effectuer les opérations suivantes

1. $\overline{(11011)}_2 + \overline{(1111)}_2$
2. $\overline{(11011111)}_2 + \overline{(111001)}_2$
3. $\overline{(11011111)}_2 \times \overline{(111001)}_2$
4. $\overline{(4A21)}_{16} + \overline{(20FB)}_{16}$

Exercice 34 :

On pose $x = \overline{(10\dots01)}_2$ *(n zéros entourés de deux 1)*. Comment s'écrit le carré de $x$en base 2 ? $\overline{(1111000001)}_2$ est-il un carré ? Si oui, quelle est sa racine carrée ?

Exercice 35 :

L'expression d'un entier naturel n au moyen d'une base de numération b est $n = \overline{(1254)}_b$
On sait, de plus, que l'expression de l'entier $2n$, avec la même base b est $2n = \overline{(2541)}_b$

1. Déterminer les valeurs de b et n exprimées en base 10
2. Déterminer les expressions, en base b des entiers $3n$ et $4n$

Exercice 36 :

Les 2 questions de cet exercice sont totalement indépendantes

1. Trouver la base b du système de numération pour laquelle nous avons :

$$\overline{(35)}_b + \overline{(13)}_b = \overline{(51)}_b$$

2. Quels sont les nombres de 3 chiffres tels que $\overline{(xyz)}_7 = \overline{(zyx)}_{11}$

Exercice 37 :

On considère le système de numération dont la base est x

1. Montrer que les nombres $2(x-1)$ et $(x-1)^2$ s'écrivent, dans la base x avec les mêmes chiffres, mais disposés dans un ordre opposé.
2. On considère les nombres a et b différents de x et de 1, mais tels que $a + b = x + 1$.
   Montrer que les nombres $a(x-1)$ et $b(x-1)$ s'écrivent, dans la base x avec les mêmes chiffres, mais disposés dans un ordre opposé.
3. Vérifier ces résultats pour x égal à « quatre » et $a = 3$ et $b = 1$

Exercice 38 :

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 3x^2 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - x^2$
2. Ecrire le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$ sous la forme d'un produit de 2 polynômes du second degré.
3. Déduire de ce qui précède que, si la base de numération est au moins égale à « cind » le nombre $\overline{(10304)}_x$ est divisible par $\overline{(112)}_x$
4. La base étant « sept », exprimer le quotient de la division de $\overline{(10304)}_7$ par $\overline{(112)}_7$

Exercice 39 :

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$(b-1)\left(b^n + b^{n-1} + \cdots + b^2 + b + 1\right) = b^{n+1} - 1$$

2. En déduire que $b^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k < b^{n+1}$