2.6 Quelques exercices corrigés

2.6.1 Construction de $\mathbb{N}$

Exercice 1 :

1. *Etant donnés 2 entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, s'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$, démontrez que cet élément x est unique. On le notera alors $x = b - a$, et nous avons : $a + (b - a) = b$*

   Supposons que cet x tel que $a + x = b$ ne soit pas unique, et soit donc $y \in \mathbb{N}$, un second élément tel que nous ayons aussi $a + y = b$. Alors, $b = a + x = a + y$, et de la régularité de l'addition, nous avons $x = y$

2. *Si $x = b - a$ existe, montrer que pour tout $c \in \mathbb{N}$, $cb - ca$ existe et que l'on a : $c(b - a) = cb - ca$*

   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Par hypothèse, nous avons $a + (b - a) = b$, et donc $c[a + (b - a)] = cb$.
   Par distributivité, $c[a + (b - a)] = ca + c(b - a)$, et donc, $ca + c(b - a) = cb$. Il existe donc $y \in \mathbb{N}$ tel que $ca + y = cb$, et ce y est $y = cb - ca$ et nous avons aussi $y = c(b - a)$.
   Donc, $c(b - a) = cb - ca$

3. *Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \times x = 0$. En déduire que 0 n'est pas régulier pour la multiplication et que, par conséquent, $0 \neq 1$*

   - ▷ Soit $x \in \mathbb{N}$
     De l'égalité $x + 0 = x$, on en déduit, d'après la question précédente, que $0 = x - x$ Donc : $0 \times x = (x - x) \times x = x \times x - x \times x = 0$
   - ▷ Bien sûr que 0 n'est pas régulier pour la multiplication, puisque même si $x \neq y$, nous avons $0 \times x = 0 \times y = 0$
   - ▷ Si on suppose $0 = 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$ $x = 1 \times x = 0 \times x = 0$. Contradiction.
     Donc, $0 \neq 1$

2.6.2 Le raisonnement par récurrence

Exercice 3 :

Montrer que, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

On appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

$$P(n) : \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$

— **Vérifions pour le premier terme** $n = 0$
  Nous avons bien, pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0a = 1$

— **Supposons** $P(n)$ **vraie**

— **Démontrons maintenant que** $P(n + 1)$ **est vraie**
  Nous avons, par hypothèse de récurrence, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, et $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n$ donc :

$$(1 + a)^{n+1} \geqslant (1 + a) \times (1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geqslant 1 + (n + 1)a$$

  Donc, $P(n + 1)$ est vraie

Ainsi, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons$(1 + a)^n \geqslant 1 + na$
Il y a un autre moyen pour démontrer le résultat en utilisant le binôme de Newton :

$$(1 + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k \geqslant 1 + na$$

Exercice 4 :

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$*

   On appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

   $$P(n): \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$$

   — **Vérifions pour le premier terme** $n = 1$
   Nous avons bien, pour $n = 1$, $2^1 = 2 > 1$
   — **Supposons** $P(n)$ **vraie**
   — **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
   Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^n > n$, et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc :

   $$2^{n+1} > 2n = n + n \geqslant n + 1$$

   Donc, $P(n+1)$ est vraie
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $2^n > n$
   On peut remarquer que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $2^0 = 1 > 0$

2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5 \Longrightarrow 2^n > n^2$*

   Pour quoi $n \geqslant 5$?...Parce que, sans doute, pour les entiers $0, 1, 2, 3, 4$, l'inégalité est fausse !..On vérifie ?
   — Si $n = 0$, $2^0 = 1$ et $0^2 = 0$
   — Si $n = 1$, $2^1 = 2$ et $1^2 = 1$
   — Si $n = 2$, $2^2 = 4$ et $2^2 = 4$
   — Si $n = 3$, $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$
   — Si $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$
   Donc, pour ces 5 premières valeurs, l'inégalité stricte $2^n > n^2$ est prise en défaut.
   Pour $n \geqslant 5$, on appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

   $$P(n): \quad 2^n > n^2$$

   — **Vérifions pour le premier terme** $n = 5$
   Nous avons bien, pour $n = 5$, $2^5 = 32 > 25 = 5^2$
   — **Supposons** $P(n)$ **vraie**
   — **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
   Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$, et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc : $2^{n+1} > 2n^2$
   Il faudrait donc montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.
   Or, $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1$; comme, pour tout $n \geqslant 5$, nous avons $n^2 - 2n - 1 > 0$
   Donc, $P(n+1)$ est vraie
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 5$, nous avons $2^n > n^2$

3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n!$*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

   $$P(n): \quad 2^{n-1} \leqslant n!$$

   — **Vérifions pour le premier terme** $n = 0$
   Nous avons $2^{0-1} = \dfrac{1}{2}$ et $0! = 1$, et nous avons $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$, et donc $2^{0-1} \leqslant 0!$
   — **Supposons** $P(n)$ **vraie**
   — **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
   Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^{n-1} \leqslant n!$, et $2^n = 2 \times 2^{n-1}$ donc : $2^n \leqslant 2 \times n!$
   D'autre part, comme $n \geqslant 1$, nous avons $n + 1 \geqslant 2$ et donc $2 \times n! \leqslant (n+1)\, n! = (n+1)!$.
   C'est à dire $2^n \leqslant (n+1)!$.
   Donc, $P(n+1)$ est vraie
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n!$

Exercice 6 :

Soit $P(n)$ la propriété suivante : $P(n)$: $10^n + 1$ est divisible par 9. Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$; la propriété est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Supposons donc $P(n)$ et démontrons que $P(n+1)$ est vraie

Il faut donc démontrer que $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9, sachant que $10^n + 1$ est divisible par 9.

$$10^{n+1} + 1 = 10^n \times 10 + 1 = 10^n \times (9+1) + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1 = 9 \times 10^n + 9u = 9 \times (10^n + u)$$

Nous démontrons ainsi que $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9.

Nous avons donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vrai.

C'est la propriété d'hérédité du raisonnement par récurrence qui est vérifiée, mais, pas les premiers termes. En effet :

— Pour $n = 0$, $10^0 + 1 = 2$ qui n'est pas divisible par 9

— De même, pour $n = 1$, $10^1 + 1 = 11$ qui n'est pas plus divisible par 9

On n'a pas vérifié pour le premier terme. On ne peut pas conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7 :

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

- ▷ **Nous vérifions tout d'abord pour $n = 1$**

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

C'est donc vrai pour $n = 1$

- ▷ **Supposons maintenant que c'est vrai jusque l'ordre n**
- ▷ **Et démontrons que c'est vrai à l'ordre $n+1$**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} \text{ Après avoir réduit au même dénominateur}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

La récurrence n'était pas nécessaire

En effet, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

Etablir que, pour $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté, juste la manipulation aisée des factorielles

- ▷ **Vérifions que c'est vrai pour** $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k\,(k!) = 1 \times 1! = 1 \times 1 = 1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1$$

C'est donc vrai pour $n = 1$

- ▷ **Supposons maintenant que c'est crai jusqu'au rang** n
- ▷ **Démontrons que c'est vrai au rang** $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\,(k!) &= \sum_{k=1}^{n} k\,(k!) + (n+1)\,(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)\,(n+1)! \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)!\,(1+n+1) - 1 \\
&= (n+1)!\,(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 9 :

Démontrer par récurrence que

1. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ *2.* $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$

1. **Démonstration du premier point**
   - ▷ **Verifions pour le premier terme** $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0\,(0+1)\,(2 \times 0 + 1)}{6}$$

C'est donc vrai pour $n = 0$

- ▷ **Supposons que c'est vrai jusqu'au rang** n
- ▷ **Démontrons que c'est vrai au rang** $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left[\frac{n\,(2n+1) + 6\,(n+1)}{6}\right]
\end{aligned}$$

Or, $n\,(2n+1) + 6\,(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)\,(n+2)$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{(2n+3)\,(n+2)}{6}\right] = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)\,(2\,(n+1)+1)}{6}$$

Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. **Démonstration du second point**
   - ▷ **Verifions pour le premier terme** $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2$$

   - ▷ **Supposons que c'est vrai jusqu'au rang** n
   - ▷ **Démontrons que c'est vrai au rang** $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4(n+1)}{4}\right) \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= (n+1)^2\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$

Ce que nous voulions

Nous devons donc faire remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$

En déduire

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Ces questions n'ont rien à voir avec la récurrence ; elles ont plutôt à voir avec l'utilisation des résultats vus juste avant, et l'utilisation du signe somme ($\sum$). Ces exercices sont finalement, très calculatoires. Nous aurons à utiliser le résultat : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *démontré dans la partie exposé*

1. **Démonstration du premier point** Tout d'abord, nous développons $\sum_{k=0}^{n}(7k+1)^2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(7k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n}\left(49k^2+14k+1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}49k^2+\sum_{k=0}^{n}14k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 49\sum_{k=0}^{n}k^2+14\sum_{k=0}^{n}k+n+1\\ &= 49\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+14\times\frac{n(n+1)}{2}+n+1\\ &= \frac{49n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)(7n+1)\\ &= \left(\frac{n+1}{6}\right)(14n+1)(7n+6)\end{aligned}$$

Donc, $\sum_{k=0}^{n}(7k+1)^2=\left(\frac{n+1}{6}\right)(14n+1)(7n+6)$

2. **Démonstration du second point** De la même manière, nous développons $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$, ce qui ne pose aucune difficultés.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Donc, $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. **Démonstration du troisième point** Premièrement, nous allons développer $k(k+1)(k+2)$. Tous calculs faits :

$$k(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+2n+1+2\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n^2+5n+6}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\end{aligned}$$

Nous avons donc : $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6

Dire que $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6, c'est dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n(2n+1)(7n+1) = 6k$

- ▷ C'est évidemment vrai pour $n = 0$
- ▷ **Supposons que** $n(2n+1)(7n+1) = 6k$
- ▷ **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$

  La démonstration est essentiellement calculatoire

$$\begin{aligned}(n+1)(2(n+1)+1)(7(n+1)+1) = & \; n((2n+1)+2)((7n+1)+7)+(2n+3)(7n+8)\\ = & \; n(2n+1)(7n+1)+28n^2+23n+14n^2+37n+24\\ = & \; n(2n+1)(7n+1)+42n^2+60n+24\\ = & \; 6k+6\left(7n^2+10n+4\right) \text{ (Hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

  Donc, $(n+1)(2(n+1)+1)(7(n+1)+1) = 6\left(k+\left(7n^2+10n+4\right)\right)$

  Et nous avons démontré la propriété à l'ordre $n+1$

Donc, pour $n \geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6

2.6.3 La division dans $\mathbb{N}$

Exercice 11 :

Une division euclidienne a pour dividende 557 et pour reste 85. Déterminer les valeurs acceptables pour le reste et le quotient

D'après la définition de la division euclidienne, nous avons $557 = bq + 85$, c'est à dire $bq = 472$, avec comme contrainte forte, $b > 85$

Il faut donc connaître les diviseurs de 472. Or, $472 = 2^3 \times 59$. Les diviseurs de 472 sont donc :

$$\{1, 2, 4, 8, 59, 118, 236, 472\}$$

Avec la contrainte $b > 85$, b ne peut donc prendre comme valeurs que 118, 236, 472 Ainsi,

- Si $b = 472$, alors $q = 1$
- Si $b = 236$, alors $q = 2$
- Si $b = 118$, alors $q = 4$

Donc, 3 couples conviennent.

Exercice 12 :

On augmente le dividende d'une division euclidienne de 52 et le diviseur de 4. On constate alors que le quotient et le reste ne changent pas. Calculer le quotient.

Soit a le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. Nous avons $a = bq + r$.
D'après l'énoncé, nous avons aussi : $a + 52 = (b+4)q + r$. Ce qui fait :

$$\begin{aligned}a+52 = & \; (b+4)q+r\\ = & \; bq+4q+r\\ = & \; a+4q \text{ car } a = bq+r\end{aligned}$$

D'où $a + 52 = a + 4q \iff 52 = 4q \iff q = 13$
Nous avons donc $q = 13$

Exercice 13 :

1. *Trouver tous les nombres entiers compris entre 1000 et 2000 qui, divisés par 127 donnent un quotient égal au reste*

   Par définition de la division euclidienne, nous avons $a = 127q + r$, c'est à dire, ici, comme $q = r$, nous avons $a = q \times 128$.

   a apparaît donc comme étant un multiple de 128. Nous choisissons donc les multiples de 127 compris entre 1000 et 2000

— $a = 1024$ avec $q = 8$
— $a = 1152$ avec $q = 9$
— $a = 1280$ avec $q = 10$
— $a = 1408$ avec $q = 11$
— $a = 1536$ avec $q = 12$
— $a = 1664$ avec $q = 13$
— $a = 1792$ avec $q = 14$
— $a = 1920$ avec $q = 15$

2. *Trouver tous les entiers qui, divisés par 12, donnent un quotient égal au reste*

   Comme tout à l'heure, nous avons $a = 12q + r$; et comme $q = r$, ceci devient $a = 12q + q \iff a = q \times 13$.
   a apparaît donc comme les multiples nons nuls de 13

   C'est très facilement généralisable à tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   Quels sont les entiers qui, divisés par $n \in \mathbb{N}^*$, donnent un quotient égal au reste ?

   On reprend alors la démonstration pour $n = 12$! !
   Nous avons $a = nq + r$; et comme $q = r$, ceci devient $a = nq + q \iff a = q \times (n + 1)$.
   a apparaît donc comme les multiples nons nuls de $n + 1$

Exercice 14 :

Soient q et r deux entiers qui sont respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b. Quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas ; comparez alors q et r

Nous avons, par hypothèses, par définition de la division euclidienne, $a = bq + r$ et $a = (b + 1)\,q + r'$ avec $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b + 1$
Nous en déduisons donc que $bq + r = (b + 1)\,q + r' \iff r = q + r' \iff r' = r - q$. Nous en concluons que $q \leqslant r$

Par exemple, nous avons $81 = 23 \times 3 + 12$ et $81 = (23 + 1)\,3 + 9 \iff 81 = 24 \times 3 + 9$

Réciproquement, si $q \leqslant r$, alors quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas

En effet, supposons $q \leqslant r$ et $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$
Alors, il existe $t \geqslant 0$ tel que $q + t = r$ et donc :

$$a = bq + r \iff a = bq + q + t \iff a = (b + 1)\,q + t$$

Ce que nous voulions

Exercice 15 :

Déterminer le plus grand nombre entier que l'on peut ajouter au dividende d'une division euclidienne sans en modifier le quotient

Nous avons donc $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Si nous vons ajouter un nombre u au dividende, sans en changer le quotient, nous obtenons $a+u = bq+r'$ avec $0 \leqslant r' < b$, ce qui nous donne :

$$bq + r = bq + r' - u \Longrightarrow u = r' - r$$

La plus grande valeur pouvant être prise par r' est $b - 1$; ainsi, la plus grande valeur pouvant être prise par u est $u = b - 1 - r$

Exemple :
$81 = 23 \times 3 + 12$; on a ici, $a = 81$, $b = 23$ et $r = 12$; la plus grande valeur u est donc $u = (23 - 1) - 12 = 10$.
Nous avons, effectivement ; $81 + 10 = 23 \times 3 + 22 \iff 81 = 23 \times 3 + 22$