3.3 Structure de corps

3.3.1 Définition de corps

Un ensemble $\mathbb{K}$, muni d'une addition et d'une multiplication est un corps si :

1. $(\mathbb{K}, +, \times)$ **a une structure d'anneau**
2. $(\mathbb{K}^*, \times)$ **est un groupe de neutre** 1 **où nous avons noté** 0 **le neutre pour l'addition et** $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \backslash \{0\}$

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ **est un corps**

Remarque 14 :

1. Si la seconde loi $\times$ est commutative, on dit que le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif
2. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs
3. Un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de 0

   En effet, soient $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \times b = 0$
   — Si $a = 0$, c'est fini
   — Supposons $a \neq 0$; composons alors à gauche par a^{-1}

$$a \times b = 0 \iff a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times (0) = 0 \iff b = 0$$

   Ainsi, $a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Exercice 8 :

On appelle $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{x + y\sqrt{2} \text{ avec } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\}$. Montrer que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est un corps

3.3.2 Définition de sous-corps

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ **un corps et** $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$

1. $\mathbb{L}$ **est un sous-corps de** $\mathbb{K}$ **si et seulement si** $(\mathbb{L}, +, \times)$ **est un corps**
2. **Si** $\mathbb{L}$ **est un sous-corps de** $\mathbb{K}$**, on dit que** $\mathbb{K}$ **est une extension de** $\mathbb{L}$

Exemple 15 :

1. $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, et $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$, tout comme $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$

3.3.3 Théorème

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ **un corps et** $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ **non vide**
Pour que $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ **soit un sous-corps de** $\mathbb{K}$**, il faut et il suffit que :**

1. $(\forall a \in \mathbb{L})\,(\forall b \in \mathbb{L})\,(a - b \in \mathbb{L}$ **et** $ab \in \mathbb{L})$
2. $(\forall a \in \mathbb{L})\,\left(a^{-1} \in \mathbb{L}\right)$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

3.3.4 Théorème

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps

1. **Les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$**
2. **Réciproquement, si $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire tel que les seuls idéaux soient $\{0\}$ et A, alors $(A, +, \times)$ est un corps**

Démonstration

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et I un idéal de $\mathbb{K}$
   Supposons I non trivial ; il existe alors $b \in I$ tel que $b \neq 0$; alors, comme I est un idéal, $b^{-1} \times b \in I$, c'est à dire que $1 \in I$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x \times 1 \in I$, c'est à dire que $x \in I$, et donc $I = \mathbb{K}$
2. Réciproquement, soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire tel que les seuls idéaux soient $\{0\}$ et A
   Il faut montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.
   Soit $a \in A$ tel que $a \neq 0$; il suffit de montrer que a est inversible.
   L'ensemble $a \times A$ est un idéal de A et donc $a \times A = A$. A étant unitaire, il existe a' tel que $a \times a' = 1$, c'est à dire que $a' = a^{-1}$; a est donc inversible.

3.3.5 Définition d'homomorphisme de corps

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ et $(\mathbb{K}_1, +, \times)$ 2 corps. Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}_1$ une aplication.
f est un homomorphisme de corps si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$