3.4 Exercices complémentaires

3.4.1 Structure de groupe

Exercice 9 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ On définit, sur $\mathbb{R}$ la loi $\star$ définie par :

$$x \star y = x + y + a$$

Démontrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + b)$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe

Exercice 11 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = \left(a + c, be^c + de^{-a}\right)$$

Vérifier que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc^n)$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe

Exercice 13 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x \star x = e$. Démontrer que $(G, \star)$ est commutatif

Exercice 14 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ fixé.On considère :

$$H_a = \left\{ q \in \mathbb{Q} \text{ tels que } q = \frac{1 + am}{1 + an} \text{ où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il faut montrer que H_a est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$

Exercice 15 :

Soit $(G, \star)$ un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de $(G, \star)$. On considère, dans G, la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\left((x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow \left(y^{-1} \star x \in H\right)\right)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Montrer que les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont du type $x \star H$, où $x \in G$ et où :

$$x \star H = \{g \in G \text{ tels que } g = x \star h \text{ où } h \in H\}$$

3. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément neutre e ?
4. On suppose que G est un groupe d'ordre fini n *(c'est à dire* Card $G = n$*)*.Montrer que l'ordre d'un sous-groupe de G divise l'ordre du groupe G *(C'est le théorème de Lagrange)*

Exercice 16 :

Soit $(G, \star)$ un groupe non forcément commutatif de neutre e.

1. On définit, dans G la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\left((x\mathcal{R}y) \iff \left(\exists a \in G \text{ tel que } y = a \star x \star a^{-1}\right)\right)$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x\mathcal{R}y$ on dit que x et y sont conjugués

2. Soit $a \in G$ et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $a \star H \star a^{-1}$ est un sous-groupe de G
3. Un sous-groupe $H \subset G$ est dit distingué si, pour tout $a \in G$, $H = a \star H \star a^{-1}$
   (a) Montrer que le centre de G,$Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G
   (b) Montrer que l'intersection de 2 sous-groupes distingués est distinguée
   (c) Démontrer que $H \subset G$ est un sous groupe distingué si et seulement si, pour tout $x \in G$, $x \star H = H \star x$

Exercice 17 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e, H_1 et H_2, 2 sous-groupes de $(G, \star)$.
On dit que H_1 et H_2 sont somme directe de G si et seulement si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ et, pour tout $x \in G$, il existe $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$ tels que $x = x_1 \star x_2$
Démontrer que, dans ce cas, la décomposition $x = x_1 \star x_2$ est unique

Exercice 18 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e et on considère l'application Φ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (G, \star) & \longrightarrow & (G, \star) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = x^{-1} \end{array}\right.$$

Montrer que si Φ est un homomorphisme de groupe, alors $(G, \star)$ est un groupe commutatif

Exercice 19 :

1. Soient $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ 2 groupes et $f : (G, \star) \longrightarrow (G_1, \top)$ un homomorphisme de groupe. Démontrer que $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G
2. On définit, dans $(G, \star)$ une relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,((x\mathcal{R}y) \iff (f(x) = f(y)))$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   (b) Donner une autre définition de la condition $f(x) = f(y)$

Exercice 20 :

Soit $(G, \star)$ un groupe non commutatif et $Z(G)$ le centre de G. On appelle $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G :

$$\mathrm{Int}(G) = \left\{ f_a \text{ où } a \in G \text{ et } \left[\begin{array}{rcl} f_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_a(x) = a \star x \star a^{-1} \end{array}\right.\right\}$$

1. Montrer que $(\mathrm{Int}(G), \circ)$, où $\circ$ est la composition des applications, est un groupe
2. On considère l'application φ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & \mathrm{Int}(G) \\ a & \longmapsto & \varphi(a) = f_a \end{array}\right.$$

   Montrer que φ est un homomorphisme de groupe.

3. Donner $\ker\varphi$. Quand donc φ est un isomorphisme ?

Exercice 21 :

Démontrer qu'un sous groupe $H \subset G$ d'un groupe $(G, \star)$ est distingué si et seulement si il est stable par tous les automorphismes intérieurs de G

Exercice 22 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et φ, une application définie par :

$$\begin{cases} \varphi : (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ k & \longmapsto & \varphi(k) = \omega^k \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un homomorphisme de groupe
2. Rechercher $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$

3.4.2 Structure d'anneaux et de corps

Exercice 23 :

Soit $r = \sqrt[3]{2}$ et $K = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = a + br + cr^2 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3\right\}$. Montrer que $(K, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Exercice 24 :

On considère $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ où l'addition $\oplus$ est une addition définie par :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Et la multiplication $\otimes$ par :

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$

Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif unitaire. Est-il intègre ?

Exercice 25 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau, non forcément commutatif, non forcément unitaire. Soit :

$$\mathcal{C} = \{c \in A \text{ tels que } (\forall x \in A)(x \times c = c \times x)\}$$

Il faut montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$

Exercice 26 :

Anneaux de Boole
Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, $2x = x + x = 0$ et que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif
2. Démontrer que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, $xy(x + y) = 0$

Exercice 27 :

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ *(x est nilpotent)*. Montrer que si x et y sont nilpotents, alors xy et $x + y$ sont nilpotents
2. On suppose que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que $1 - x$ est inversible
3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau non forcément commutatif. Soient $u \in A$ et $v \in A$ tels que uv soit nilpotent, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(uv)^n = 0$. Il faut montrer que vu est nilpotent

Exercice 28 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire d'unité 1 et $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Il faut montrer que $\mathcal{U}, \times$ est un groupe.

Exercice 29 :

On considère $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est un anneau
2. Pour $x = a + b\sqrt{2}$, on note $C(x) = a - b\sqrt{2}$; montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $C(xy) = C(x)C(y)$
3. Pour $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on note $N(x) = xC(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sont ceux qui s'écrivent $a+b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.