5.10 Quelques exercices corrigés

5.10.1 Sur le calcul matriciel

Exercice 3 :

1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{Id}_2$?*

   Soit $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, telle que $AB = \mathrm{Id}_2$

   Posons alors $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} a+3e & b+3f \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} \end{array}$$

   De l'identité $AB = \mathrm{Id}_2$, nous pouvons écrire : $\begin{pmatrix} a+3e & b+3f \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de telle sorte que nous obtenons un système 4 équations à 6 inconnues ; il y en a beaucoup trop !!

$$\begin{cases} a+3e = & 1 \\ b+3f = & 0 \\ 4a+5c = & 0 \\ 4b+5d = & 1 \end{cases}$$

   D'où nous tirons :

$$\begin{cases} b = -3f \\ a = 1-3e \\ 5c = -4a = -4(1-3e) = 4+12e \Longrightarrow c = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5}e \\ 5d = 1-4b = 1+12f \Longrightarrow d = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}f \end{cases}$$

   Nous obtenons ainsi comme matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 1-3e & -3f \\ -\dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5}e & \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}f \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{4}{5} & \dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \dfrac{12}{5} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & \dfrac{12}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } e \in \mathbb{R} \text{ et } f \in \mathbb{R}$$

   Il y a donc une infinité de matrices $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, telle que $AB = \mathrm{Id}_2$ *(une double infinité, même !)*

2. *Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?*

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Nous avons donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Nous avons, par calcul $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$ Et nous avons donc le système d'équations :

$$\begin{cases} a+2c = & 1 \\ a+2c = & 0 \\ b+2d = & 0 \\ b+2d = & 1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible ; il n'existe donc pas d'inverse à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. *Trouver les conditions sur a, b, c, d pour que les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admettent un inverse ; lorsque l'inverse existe, donner A^{-1}*

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit l'inverse de A et posons $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Nous avons donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \end{array}$$

Si X est l'inverse de A, nous avons $AX = \mathrm{Id}_2$, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc 2 systèmes d'équations :

▷ Le premier d'inconnues x et z :

$$\begin{cases} ax+bz = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases}$$

▷ Le second d'inconnues y et t :

$$\begin{cases} ay+bt = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne des systèmes par $-c$ et la seconde ligne par a, nous obtenons :

▷ $\begin{cases} ax+bz = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -cax-cbz = & -c \\ acx+adz = & 0 \end{cases} \Longrightarrow (ad-bc)\,z = -c$

▷ $\begin{cases} ay+bt = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -cay-cbt = & 0 \\ acy+adt = & a \end{cases} \Longrightarrow (ad-bc)\,t = a$

Ainsi, si $ad-bc \neq 0$, nous obtenons $z = \dfrac{-c}{ad-bc}$, $t = \dfrac{a}{ad-bc}$, $x = \dfrac{d}{ad-bc}$ et $y = \dfrac{-b}{ad-bc}$.

Donc, si $ad-bc \neq 0$, alors, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Supposons maintenant $ad-bc = 0 \Longleftrightarrow ad = bc$

◇ Si $a = 0$, alors $bc = 0$ et $b = 0$ ou $c = 0$
Supposons $b = 0$
Alors, les systèmes deviennent :

$$\begin{cases} 0x+0z = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0y+0t = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases}$$

Avoir $0x+0z = 1$ est impossible, donc, si $a = 0$ et $b = 0$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
Si $c = 0$, la discussion est semblable, et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

◇ La discussion est identique si $d = 0$, et dans ces cas, nous voyons que les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles

◇ Supposons $ad \neq 0$; alors, comme $ad = bc$, $bc \neq 0$, c'est à dire $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.
De $ad = bc$, nous tirons $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \lambda \neq 0$ et donc $a = \lambda b$ et $c = \lambda d$.
On s'intéresse aux systèmes d'équations :

Pour le premier d'inconnues x et z :

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+bz= & 1 \\ cx+dz= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda bx+bz= & 1 \\ \lambda dx+dz= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} b(\lambda x+z)= & 1 \\ d(\lambda x+z)= & 0 \end{array}\right.$$

Comme $b \neq 0$ et $d \neq 0$, nous avons $\lambda x+z=0$ et $\lambda x+z\neq 0$; contradiction !!

Pour le second système, ce serait identique. La matrice A n'est donc pas inversible.

Donc

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ avec } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible si et seulement si } ad-bc \neq 0$$

La matrice inverse est donnée par $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4. *Quel est l'inverse de la matrice* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est l'inverse de la matrice. Alors $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ et nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1+2y_1 & -x_2+2y_2 & -x_3+2y_3 \\ 2x_1+5y_1+3z_1 & 2x_2+5y_2+3z_2 & 2x_3+5y_3+3z_3 \end{pmatrix}$$

De l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1+2y_1 & -x_2+2y_2 & -x_3+2y_3 \\ 2x_1+5y_1+3z_1 & 2x_2+5y_2+3z_2 & 2x_3+5y_3+3z_3 \end{pmatrix}$, nous obtenons 3 systèmes de 3 équations à 3 inconnues :

- $\triangleright$ $\left\{\begin{array}{rl} x_1= & 1 \\ -x_1+2y_1= & 0 \\ 2x_1+5y_1+3z_1= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x_1=1 \quad y_1=\dfrac{1}{2} \quad z_1=\dfrac{-3}{2}$
- $\triangleright$ $\left\{\begin{array}{rl} x_2= & 0 \\ -x_2+2y_2= & 1 \\ 2x_2+5y_2+3z_2= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x_2=0 \quad y_2=\dfrac{1}{2} \quad z_2=\dfrac{-5}{6}$
- $\triangleright$ $\left\{\begin{array}{rl} x_3= & 0 \\ -x_3+2y_3= & 0 \\ 2x_3+5y_3+3z_3= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow x_3=0 \quad y_3=0 \quad z_3=\dfrac{1}{3}$

D'où nous obtenons l'inverse $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{-3}{2} & \dfrac{-5}{6} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Nous pouvons remarquer que si A est triangulaire inférieure, son inverse $B=A^{-1}$ est elle aussi triangulaire inférieure

Exercice 4 :

1. *Calculer* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ *et généraliser pour calculer* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

Par simples calculs, nous obtenons

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_4$

Il est donc possible de généraliser, en écrivant que si $n \geqslant 4$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \mathcal{O}_4$

2. *La matrice :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible*

   Si cette matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ était inversible, il existerait $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_4$. Or, pour $n \geqslant 4$, $(AB)^n = A^n \times B^n = \mathcal{O}_4 \times B^n = \mathcal{O}_4$, alors que $(\mathrm{Id}_4)^n = \mathrm{Id}_4$. C'est donc impossible, et la matrice A n'est pas inversible

Exercice 5 :

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n

   Premièrement, en posant $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons $A = \mathrm{Id}_2 + X$, et donc, comme Id_2 et X commutent, par la formule du binôme :

   $$A^n = (\mathrm{Id}_2 + X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \mathrm{Id}_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

   Or, nous avons $X^0 = \mathrm{Id}_2$ et $X^2 = \mathcal{O}_2$ donc :

   $$A^n = (\mathrm{Id}_2 + X)^n = \mathrm{Id}_2 + nX = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer* $(A - \mathrm{Id}_2)^2$

   De $A = \mathrm{Id}_2 + X$, nous tirons que $A - \mathrm{Id}_2 = X$; comme $X^2 = \mathcal{O}_2$, nous avons $(A - \mathrm{Id}_2)^2 = \mathcal{O}_2$

3. *En déduire* A^{-1}

   Par la formule du binôme, nous avons $(A - \mathrm{Id}_2)^2 = A^2 - 2A + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$, c'est à dire :

   $$A^2 - 2A + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2 \iff 2A - A^2 = \mathrm{Id}_2 \iff A(2\mathrm{Id}_2 - A) = \mathrm{Id}_2$$

   Et donc, $A^{-1} = 2\mathrm{Id}_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Question complémentaire :

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Calculer le produit AB et BA des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Par calcul, nous trouvons :

$$AB = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} a+c+ac & b+c+ab & 2c+a^2 \\ a+b+bc & 2b+b^2 & b+c+ab \\ 2a+c^2 & a+b+bc & 2a+c \end{pmatrix}$$

Une nouvelle preuve de la non commutativité de la multiplication matricielle ! !

Exercice 8 :

On considère les matrices carrées d'ordre 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$*

   Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

   Pour touver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$, nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} a^2+bc = & a \\ b(a+d) = & b \\ c(a+d) = & c \\ d^2+bc = & d \end{cases}$$

   ▷ **Supposons $b \neq 0$**
   Alors, de l'équation $b(a+d) = b$, nous tirons, par simplification, $a+d=1 \iff d = 1-a$
   De l'équation $a^2+bc = a$, nous tirons l'équation du second degré $a^2 - a + bc = 0$ avec pour paramètres b et c.

   Le discriminant est donné par $\Delta = 1-4bc$. Ainsi, si $\Delta \geqslant 0 \iff 1-4bc \geqslant 0 \iff bc \leqslant \frac{1}{4}$, il y a 2 racines à cette équation, et nous avons :

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \quad d_1 = \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \text{ ou bien } a_2 = \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \quad d_1 = \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2}$$

   Nous avons donc 2 familles de solutions :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ et } bc \leqslant \frac{1}{4} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ et } bc \leqslant \frac{1}{4} \right\}$$

   Et si $b \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$

   ▷ **Supposons $b = 0$**
   Alors, le système devient :

$$\begin{cases} a^2 = & a \\ c(a+d) = & c \\ d^2 = & d \end{cases}$$

   D'où nous tirons $a = 1$ ou $a = 0$ et $d = 1$ ou $d = 0$

- ◇ Si $a = 1$ et $d = 1$, alors $2c = c$ et donc $c = 0$, et nous obtenons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice identité Id_2
- ◇ Si $a = 1$ et $d = 0$, alors, nous avons $c = c$, ce qui veut dire que $c \in \mathbb{R}$, nous obtenons donc une famille de solutions :
$$\mathcal{T}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \right\}$$
- ◇ Si $a = 0$ et $d = 1$, le problème est identique et nous obtenons donc une seconde famille de solutions :
$$\mathcal{T}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \right\}$$
- ◇ Si $a = 0$ et $b = 0$, nous avons $0c = c$ et donc $c = 0$ et nous obtenons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice nulle $\mathcal{O}_2$

Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ sont appelées « projecteurs » Nous avons donc, ici, tous les projecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{Id}_2$*

Nous avons déjà calculé A^2, mais les nouvelles conditions nous donnent un nouveau système :
$$\begin{cases} a^2 + bc = & 1 \\ b(a+d) = & 0 \\ c(a+d) = & 0 \\ d^2 + bc = & 1 \end{cases}$$

▷ **Supposons $b \neq 0$**

Alors $a + d = 0 \Longleftrightarrow a = -d$, et le système devient : $a^2 + bc = 1$ et $c \in \mathbb{R}$, d'où $a^2 = 1 - bc$. Donc, si $b \neq 0$, l'ensemble des matrices est de la forme $\begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $1 - bc \geqslant 0 \Longleftrightarrow bc \leqslant 1$ ou de la forme $\begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $1 - bc \geqslant 0 \Longleftrightarrow bc \leqslant 1$

▷ **Supposons $b = 0$**

Alors, le système devient :
$$\begin{cases} a^2 = & 1 \\ c(a+d) = & 0 \\ d^2 = & 1 \end{cases}$$

Alors, $a = 1$ ou $a = -1$ et $d = 1$ ou $d = -1$

- ◇ Si $c \neq 0$, alors $a + d = 0 \Longleftrightarrow a = -d$, et nous obtenons comme matrices solutions :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

— Si $c \neq 0$, alors $a+d$ peut prendre n'importe quelle valeur, et nous avons 4 matrice solutions :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{Id}_2$$

Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{Id}_2$ sont appelées « involutions » Nous avons donc, ici, toutes les involutions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

3. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; nous posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

▷ Dans un premier temps, nous calculons AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, $AB = \begin{pmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{pmatrix}$

▷ Calculons, maintenant BA.

Un calcul simple donne $BA = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$

▷ En faisant l'égalité $BA = AB$, nous tombons sur un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2a-b = & 2a+c \\ a+b = & 2b+d \\ 2c-d = & -a+c \\ c+d = & -b+d \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} -b = & c \\ a = & b+d \\ c-d = & -a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} b+c = & 0 \\ a-b-d = & 0 \\ a+c-d = & 0 \end{array} \right.$$

D'où on trouve : $c = -b$, $a = b+d$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$. Ces matrices sont donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R}$$

Exercice 10 :

Soit a un nombre réel non nul et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ Calculer A^n pour tout entier relatif n.

1. **Supposons $n \in \mathbb{N}$**

   Il est facile de voir que $A = a \times \mathrm{Id}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'après le binôme de Newton *(puisque* Id_2 *commute avec toutes les matrices)* :

   $$A^n = \left(a \times \mathrm{Id}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

   Un calcul rapide montre que si $k \geqslant 2$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathcal{O}_2$, de telle sorte que

   $$A^n = a^n \mathrm{Id}_2 + n \times a^{n-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

2. **Supposons maintenant que $n \in \mathbb{Z}^-$**

   C'est à dire que n est un entier négatif. Nous avons alors $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n}$ avec $-n \in \mathbb{N}$

   Nous avons $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = a^{-1} \times \mathrm{Id}_2 + a^{-2} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Un nouveau calcul rapide montre que si $k \geqslant 2$, alors $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathcal{O}_2$, et en réutilisant la formule du binôme, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^n &= \left(a^{-1} \times \mathrm{Id}_2 + a^{-2} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^{-1}\right)^{n-k} \times \left(a^{-2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{-n-k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k \\
&= a^{-n} \times \mathrm{Id}_2 + n a^{-n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{-n} & -na^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}^-$, nous avons $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

3. **<u>En faisant la synthèse des points 1 et 2 ci-dessus</u>**

   Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Exercice 12 :

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des matrices forme un sous-corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour plus de concision et de clarté, nous notons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$

Nous avons ainsi $M(0,0) = \mathcal{O}_2$ et $M(1,0) = \mathrm{Id}_2$

1. Tout d'abord, $A \neq \emptyset$ puisque $M(0,0)$ et $M(1,0)$ sont des éléments de A
2. D'autre part, pour $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$:
   - $M(x,y) - M(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1+y_1 & 4y_1 \\ -y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_1+y-y_1 & 4(y-y_1) \\ -(y-y_1) & x-x_1-y+y_1 \end{pmatrix}$
     Et donc $M(x,y) - M(x_1,y_1) = M(x-x_1, y-y_1)$
     D'où, si $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$, alors $M(x,y) - M(x_1,y_1) \in A$
   - Calculons maintenant $M(x,y) \times M(x_1,y_1)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1+y_1 & 4y_1 \\ -y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} (x+y)(x_1+y_1) - 4yy_1 & 4y_1(x+y) + 4y(x_1-y_1) \\ -y(x_1+y_1) - y(x-y)_1 & -4yy_1 + (x-y)(x_1-y_1) \end{pmatrix} \end{array}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
M(x,y) \times M(x_1,y_1) &= \begin{pmatrix} xx_1 - 3yy_1 + xy_1 + yx_1 & 4(xy_1 + yx_1) \\ -(xy_1 + yx_1) & xx_1 - 3yy_1 - (xy_1 + yx_1) \end{pmatrix} \\
&= M(xx_1 - 3yy_1, xy_1 + x_1 y)
\end{aligned}$$

   Et donc, si $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$, alors $M(x,y) \times M(x_1,y_1) \in A$
3. D'autre part, $M(x,y) \in A$ est inversible si et seulement si $(x+y)(x-y) + 4y^2 = x^2 + 3y^2 \neq 0$. Or, $x^2 + 3y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Ainsi, seule $M(0,0) = \mathcal{O}_2$ n'est pas inversible. Supposons $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, alors $M(x,y)$ est inversible et :

$$(M(x,y))^{-1} = \frac{1}{x^2+3y^2} \begin{pmatrix} x-y & -4y \\ y & x+y \end{pmatrix} = M\left(\frac{x}{x^2+3y^2}, \frac{-y}{x^2+3y^2}\right)$$

Donc A muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps.

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble G des matrices de la forme

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$$

où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe ; est-il commutatif ?

Il y a plusieurs conditions à vérifier !

1. Premièrement, $G\neq\emptyset$ puisque $M(0,0,0)=\mathrm{Id}_3$ est un élément de G ; ceci est d'autant plus intéressant que Id_3 est le neutre pour la multiplication des matrices.
2. D'autre part, comme la multiplication est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle l'est, en particulier dans G
3. Montrons que la multiplication est interne à G.
   Soient donc $M(a,b,c)$ et $M(a_1,b_1,c_2)$ 2 matrices de G, avons nous $M(a,b,c)\times M(a_1,b_1,c_2)\in G$?
   Nous avons :
   $$M(a,b,c)\times M(a_1,b_1,c_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+a_1&1&0\\b+a_1c+b_1&c+c_1&1\end{pmatrix}=M(a+a_1,b+b_1+a_1c,c+c_1)$$
   La multiplication est donc une loi interne dans G
   Avec ce résultat, la multiplication est-elle commutative dans G ?
   $$M(a_1,b_1,c_1)\times M(a,b,c)=M(a_1+a,b_1+b+ac_1,c_1+c)$$
   On voit tout de suite que, pour que la multiplication soit commutative, il faut que
   $$b+b_1+a_1c=b_1+b+ac_1\Longrightarrow a_1c=ac_1$$
   La multiplication n'est donc pas commutative : **nous n'avons pas,** en particulier
   $$M(2,1,4)\times M(3,1,3)=M(3,1,3)\times M(2,1,4)$$
   puisque $M(2,1,4)\times M(3,1,3)=M(5,14,7)$ et $M(3,1,3)=M(3,1,3)\times M(2,1,4)=M(5,8,7)$
4. Les matrices de G sont-elles inversibles et leur inverse est-elle dans G ?[1]
   Il faut donc trouver une matrice $\begin{pmatrix}x&y&z\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}$ telle que :
   $$\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x&y&z\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
   Tous calculs faits, nous arrivons aux systèmes :
   $$\left\{\begin{array}{rl}x=&1\\ax+x_1=&0\\bx+cx_1+x_2=&0\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{rl}y=&0\\ay+y_1=&1\\by+cy_1+y_2=&0\end{array}\right.\quad\left\{\begin{array}{rl}z=&0\\az+z_1=&0\\bz+cz_1+z_2=&1\end{array}\right.$$
   D'où nous tirons, très simplement, que $z_2=1$, $z=z_1=0$, puis que $y=0$, $y_1=1$ et $y_2=-c$ et, enfin, $x=1$, $x_1=-a$ et $x_2=-b+ac$, et donc :
   $$\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\-b+ac&-c&1\end{pmatrix}=M(-a,-b+ac,-c)$$
   Ainsi l'inverse de $M(a,b,c)$ qui est $M(-a,-b+ac,-c)$ est bien un élément de A

Ainsi, G est un groupe multiplicatif non abélien

1. Nous utilisons, ici, des outils forts rudimentaires. Dans les prochains cours, nous donnerons des méthodes systématiques de calcul

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Trouver une matrice B telle que $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$*

   Clairement, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   En posant $B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons bien $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$

2. *Calculer B^2 et B^3*

   Par calcul, nous avons :
   - $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Et donc, pour tout $n_geqslant3$, nous avons $B^n = \mathcal{O}_3$

3. *En déduire la valeur de A^n en fonction de n*

   Nous avons donc $A^n = (2\mathrm{Id}_3 + B)^n$. D'après le binôme de Newton, nous avons :

$$A^n = (2\mathrm{Id}_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{Id}_3^{n-k}B^k = \binom{n}{0}2^n\mathrm{Id}_3 + \binom{n}{1}2^{n-1}B + \binom{n}{2}2^{n-2}B^2$$

   Et donc $A^n = 2^n\mathrm{Id}_3 + n2^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2 = 2^n\mathrm{Id}_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2$

   D'où

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1)2^{n-3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & -3n2^n & -3n(n-1)2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= 2^n\begin{pmatrix} 1 & -3n & -\dfrac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 16 :

Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, le produit $A \times A^T$ est symétrique

La résolution de cet exercice utilise 4 types de résultats :

- Le premier, c'est que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et que, donc, le produit $A \times A^T$ est une matrice carrée de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$
- D'autre part, si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $\left(A^T\right)^T = A$
- Le troisième résultat, c'est que $(AB)^T = B^T \times A^T$
- Le dernier résultat, c'est que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, si et seulement si $X = X^T$

Donc, forts de ces remarques, nous avons : $\left(A \times A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \times A^T = A \times A^T$.

Nous avons donc $\left(A \times A^T\right)^T = A \times A^T$ et la matrice $A \times A^T$ est symétrique

Exercice 17 :

Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice quelconque. Nous notons : $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$

- ▷ Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $S = \left((s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$ et $s_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}+a_{j,i}}{2}$.
  Clairement, $s_{i,j} = s_{j,i}$ et la matrice S est donc symétrique
- ▷ De la même manière, soit $S^1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $S^1 = \left((s^1_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$ et $s^1_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}-a_{j,i}}{2}$.
  Tout aussi clairement, $s^1_{i,j} = -s^1_{j,i}$ et la matrice S^1 est donc antisymétrique

Nous avons, de manière évidente, $a_{i,j} = s_{i,j} + s^1_{i,j}$, et donc, au niveau des matrices $A = S + S^1$, ce qui montre que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Exercice 18 :

On définit 3 suites de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = & u_{n-1}+v_{n-1}\\ v_n = & v_{n-1}+w_{n-1}\\ w_n = & w_{n-1}\end{cases}$$

Le but du problème est d'exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

1. *Trouver une matrice A telle que* $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-1}\\ v_{n-1}\\ w_{n-1}\end{pmatrix}$

   Clairement, nous avons :

   $$\begin{cases} u_n = & u_{n-1}+v_{n-1}+0w_{n-1}\\ v_n = & 0u_{n-1}+v_{n-1}+w_{n-1}\\ w_n = & 0u_{n-1}+0v_{n-1}+w_{n-1}\end{cases} \iff \begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} u_{n-1}\\ v_{n-1}\\ w_{n-1}\end{pmatrix}$$

   Donc, $A = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. *En déduire que* $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}$

   Voilà un résultat assez évident :

   $$\begin{pmatrix} u_1\\ v_1\\ w_1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_2\\ v_2\\ w_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1\\ v_1\\ w_1\end{pmatrix} = A\left(A\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}\right) = A^2\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}$$

   En généralisant par une récurrence simple, nous avons donc $\begin{pmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}$

3. *Soit $M = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Calculer $(M+\mathrm{Id}_3)^n$ et en déduire que $A^n = \mathrm{Id}_3 + nM + \dfrac{n(n-1)}{2}M^2$; en déduire u_n ,v_n ,w_n en fonction de u_0 ,v_0 ,w_0*

   Par des calculs simples, nous avons $M^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $M^3 = \mathcal{O}_3$

Tout de suite, nous voyons que $A = M + \mathrm{Id}_3$, et que $A^n = (M + \mathrm{Id}_3)^n$ se calcule grêce au binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (M + \mathrm{Id}_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{Id}_3)^{n-k} M^k \\ &= \binom{n}{0} \mathrm{Id}_3 + \binom{n}{1} M + \binom{n}{2} M^2 \\ &= \mathrm{Id}_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{cases} u_n = & u_0 + nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} w_0 \\ v_n = & v_0 + nw_0 \\ w_n = & w_0 \end{cases}$$

Il y a une autre façon de résoudre, sans passer par le calcul matriciel

Reprenons la définition des 3 suites :

$$\begin{cases} u_n = & u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = & v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = & w_{n-1} \end{cases}$$

- ▷ De la dernière égalité $w_n = w_{n-1}$, nous déduisons que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0$
- ▷ L'égalité suivante $v_n = v_{n-1} + w_{n-1} \iff v_n = v_{n-1} + w_0$, montre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison w_0, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $v_n = v_0 + nw_0$
- ▷ Et, pour terminer, nous avons

  $$u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \iff u_n = u_{n-1} + v_0 + (n-1) w_0 \iff u_n - u_{n-1} = v_0 + (n-1) w_0$$

  En passant aux sommations, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (v_0 + (k-1) w_0)$

  Or :

  — $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$

  — $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_0 + (k-1) w_0) = \sum_{k=1}^{n} v_0 + \sum_{k=1}^{n} (k-1) w_0 = nv_0 + w_0 \sum_{k=1}^{n} (k-1) = nv_0 + \frac{n(n-1)}{2} w_0$

  D'où $u_n - u_0 = nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} w_0$, c'est à dire $u_n = u_0 + nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2} w_0$

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{32} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ *On appelle Trace de* A *, la somme des éléments diagonaux, c'est à dire le nombre* $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$

1. *Montrer que pour toute matrice* A *et* B *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A + B)$

   - ▷ Soit donc $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \right)$ et $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$
   - ▷ Pour $B = \left((b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \right)$ et $\mathrm{tr}(B) = b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}$; d'où $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = a_{1,1} + b_{1,1} + a_{2,2} + b_{2,2} + a_{3,3} + b_{3,3}$

- ▷ Nous avons $A+B=\left((a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et donc $\mathrm{tr}\,(A+B)=a_{1,1}+b_{1,1}+a_{2,2}+b_{2,2}+a_{3,3}+b_{3,3}=\mathrm{tr}\,(A)+\mathrm{tr}\,(B)$

2. *Montrer que pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\,(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}\,(A)$*

   Rien de moins difficile, puisque $\lambda A=\left((\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$

3. *Montrer que $\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA)$*

   - ▷ Si $A=\left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et $B=\left((b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$, alors $AB=\left((c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ où $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{3}a_{i,k}b_{k,j}$
   - ▷ Et $BA=\left((d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ où $d_{i,j}=\sum_{k=1}^{3}b_{i,k}a_{k,j}$
   - ▷ Et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(AB)&=\sum_{i=1}^{3}c_{i,i}\\&=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}a_{i,k}b_{k,i}\right)\\&=\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i,k}b_{k,i}\right)\\&=\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}b_{k,i}a_{i,k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{3}d_{k,k}\\&=\mathrm{tr}\,(BA)\end{aligned}$$

   Nous en concluons donc que, pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(AB)=\mathrm{tr}\,(BA)$

4. *Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(A)=\mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right)$*

   Par la question précédente, nous avons :

$$\mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}A\right)P\right)=\mathrm{tr}\left(P\left(P^{-1}A\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\left(PP^{-1}\right)A\right)=\mathrm{tr}\,(A)$$

Exercice 22 :

Cet exercice est, en fait, l'étude d'une équation du second degré dans un anneau ; étude qui peut nous donner quelques surprises !!

Dans ce problème, on ne considère que les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. *Trouver toutes les matrices $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2=\begin{pmatrix}-1&7\\+7&+4\end{pmatrix}$*

   C'est un type de question déjà résolue. Nous appelons $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et alors $M^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}$.

   L'égalité $M^2=\begin{pmatrix}-1&7\\+7&+4\end{pmatrix}$ nous conduit au système :

$$\begin{cases}a^2+bc=&-1\\b(a+d)=&7\\c(a+d)=&7\\d^2+bc=&4\end{cases}$$

Des équations $b\,(a+d) = 7$ et $c\,(a+d) = 7$, on déduit $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a+d \neq 0$ et $b = c$; nous obtenons donc un nouveau système, équivalent au premier :

$$\left\{\begin{array}{rl} a^2+b^2 = & -1 \\ b\,(a+d) = & 7 \\ b = & c \\ d^2+b^2 = & 4 \end{array}\right.$$

Système qui est impossible puisque nous ne pouvons pas avoir $a^2+b^2 = -1$. Il n'existe donc pas de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$

2. *Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$*

   Nous appelons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b\,(a+d) \\ c\,(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$.
   L'égalité $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ nous conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rl} a^2+bc = & 1 \\ b\,(a+d) = & 8 \\ c\,(a+d) = & 0 \\ d^2+bc = & 9 \end{array}\right.$$

   Des équations $b\,(a+d) = 8$ on déduit $b \neq 0$ et $a+d \neq 0$. De $c\,(a+d) = 0$ et de $a+d \neq 0$ on déduit $c = 0$; nous obtenons donc un nouveau système, équivalent au premier :

$$\left\{\begin{array}{rl} a^2 = & 1 \\ b\,(a+d) = & 7 \\ c = & 0 \\ d^2 = & 9 \end{array}\right.$$

   D'où $a = \pm 1$ et $d = \pm 3$. Ainsi :
   - ▷ Si $a = +1$ et $d = +3$, alors $b\,(a+d) = 8 \iff 4b = 8$ d'où $b = 2$ et la matrice A est du type :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - ▷ Si $a = +1$ et $d = -3$, alors $b\,(a+d) = 8 \iff -2b = 8$ d'où $b = -4$ et la matrice A est du type :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   - ▷ Si $a = -1$ et $d = +3$, alors $b\,(a+d) = 8 \iff 2b = 8$ d'où $b = 4$ et la matrice A est du type :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   - ▷ Si $a = -1$ et $d = -3$, alors $b\,(a+d) = 8 \iff -4b = 8$ d'où $b = -2$ et la matrice A est du type :

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

   Il existe donc 4 racines carrées à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. De plus, nous pouvons remarquer que $A_4 = -A_1$ et $A_3 = -A_2$

3. *Nous voulons trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2$ où $B = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*

(a) *Trouver $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 + C$ où Id_2 est la matrice identité d'ordre 2*

Il suffit d'utiliser le binôme de Newton !

$$(X - 3\mathrm{Id}_2)^2 = X^2 - 6X + 9\mathrm{Id}_2 \Longleftrightarrow X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 - 9\mathrm{Id}_2$$

Et donc $C = -9\mathrm{Id}_2$

(b) *En déduire toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2$*

$$X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 - 9\mathrm{Id}_2 + B = \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 = 9\mathrm{Id}_2 - B$$

Il faut donc trouver des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 9\mathrm{Id}_2 - B$. Or, $9\mathrm{Id}_2 - B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $X - 3\mathrm{Id}_2 = A_1$, $X - 3\mathrm{Id}_2 = A_2$, $X - 3\mathrm{Id}_2 = -A_1$ ou $X - 3\mathrm{Id}_2 = -A_2$. Il y a donc 4 racines à cette équation du second degré qui sont :

i. $X_1 = 3\mathrm{Id}_2 + A_1$, c'est à dire $X_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

ii. $X_2 = 3\mathrm{Id}_2 + A_2$, c'est à dire $X_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii. $X_3 = 3\mathrm{Id}_2 - A_1$, c'est à dire $X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $X_4 = 3\mathrm{Id}_2 - A_2$, c'est à dire $X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

4. *Résoudre $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ où $C = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$*

Nous allons utiliser la méthode précédente :

$$X^2 + 10X + C = (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 - 25\mathrm{Id}_2 + C$$

Et donc, $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 - 25\mathrm{Id}_2 + C = \mathcal{O}_2 \Longleftrightarrow (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 = 25\mathrm{Id}_2 - C$

Or : $25\mathrm{Id}_2 - C = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Il faut donc trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$. Or, il n'existe pas de telles matrices. L'équation matricielle $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ n'admet donc pas de solution

5.10.2 Calcul des déterminants

Exercice 24 :

Par des méthodes de combinaisons linéaires, calculer le déterminant de la matrice d'ordre 3 suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On considère le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Si nous faisons des combinaisons linéaires sur les lignes, nous ne changeons pas le déterminant :

$$\begin{cases} L_1' \longleftarrow & L_1 \\ L_2' \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3' \longleftarrow & L_3 + L_1 \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

En permutant 2 lignes, le déterminant change de signe ; donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant est le produit des éléments diagonaux. donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

Exercice 25 :

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + z = & 8 \\ x - 2y + z = & -4 \\ -x + 2y - z & = 2 \end{array} \right.$

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ qui, visiblement, est nul.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. Nous avons :

$$\Delta_x = 8 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 \times (-2 - 2) + 2 \times (2 + 2) = -16 + 8 = -8$$

Donc $\Delta_x \neq 0$, et le système n'admet pas de solutions

Exercice 26 :

Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{ll} mx + y = & 1 \\ x + my = & 1 \end{array} \right.$

   Le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$

   ▷ $\Delta \neq 0$ si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -1$.
   Donc, si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, alors $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$ et $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{m-1}{m^2-1} = \dfrac{1}{m+1}$
   De la même manière, $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{m-1}{m^2-1} = \dfrac{1}{m+1}$
   Et donc $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{1}{m+1} \right) \right\}$

   ▷ Si $m = 1$, alors $\Delta = 0$, et le système devient :

   $$\left\{ \begin{array}{ll} x + y = & 1 \\ x + y = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x + y = 1$$

   Il y a donc une infinité de solutions donnée par l'ensemble : $S = \{(x, 1 - x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$

▷ Si $m=-1$, nous avons toujours $\Delta=0$, et le système devient :

$$\begin{cases} -x+y= & 1 \\ x-y= & 1 \end{cases}$$

Système qui est impossible. Il n'y a donc pas de solutions

2. $\begin{cases} (m-2)\,x+my= & -m \\ mx+(m-2)\,y= & 3m-2 \end{cases}$

Le déterminant du système est $\Delta=\begin{vmatrix} m-2 & m \\ m & m-2 \end{vmatrix}=(m-2)^2-m^2=4-4m$

▷ $\Delta\neq 0$ si et seulement si $m\neq 1$.
Donc, si $m\neq 1$, alors $\Delta_x=\begin{vmatrix} -m & m \\ 3m-2 & m-2 \end{vmatrix}=-m\,(m-2)-m\,(3m-2)=-m^2+2m-3m^2+2m=4m-4m^2=4m\,(1-m)$ et $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{4m\,(1-m)}{4-4m}=m$
De la même manière, $\Delta_y=\begin{vmatrix} m-2 & -m \\ m & 3m-2 \end{vmatrix}=(m-2)\,(3m-2)+m^2=3m^2-2m-6m+4+m^2=4m^2-8m+4=4\left(m^2-2m+1\right)=4\,(m-1)^2$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{4\,(m-1)^2}{4-4m}=1-m$
Et donc $S=\{(m,1-m)\}$

▷ Si $m=1$, alors $\Delta=0$, et le système devient :

$$\begin{cases} -x+y= & -1 \\ x-y= & 1 \end{cases} \iff x-y=1$$

Il y a donc une infinité de solutions donnée par l'ensemble : $S=\{(x,x-1)\ \text{ avec } x\in\mathbb{R}\}$

Exercice 27 :

1. *Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} -x+y+z= & 1 \\ x-y+z= & 1 \\ x+y-z= & 1 \end{cases}$

▷ On calcule donc le déterminant du système en développant suivant la première ligne :

$$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(1-1)-(-1-1)+(1+1)=4$$

▷ Nous calculons le déterminant en x :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(-1-1)+(1+1)=4$$

D'où on trouve $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{4}{4}=1$

▷ Nous calculons le déterminant en y :

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(-1-1)-(-1-1)+0=4$$

D'où on trouve $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{4}{4}=1$

▷ Nous calculons le déterminant en z :

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(-1-1)-0+(1+1)=4$$

D'où on trouve $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{4}{4}=1$

Nous ontenons donc comme solution, $x = y = z = 1$

Il y a une autre façon de résoudre ce système ***(peut-être plus simple ! !)***
On part du système de départ :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y+z= & 1 \\ x-y+z= & 1 \\ x+y-z= & 1 \end{array}\right.$$

On fait des combinaisons linéaires entre les lignes :

$$L_1' = L_1 \qquad L_2' = L_2 + L_1 \qquad L_3' = L_3 + L_1$$

Nous obtenons alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y+z= & 1 \\ 2z= & 2 \\ 2y= & 2 \end{array}\right.$$

D'où $x = y = z = 1$

2. *Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rl} mx+y+z= & 1 \\ x+my+z= & 1 \\ x+y+mz= & 1 \end{array}\right.$$

▷ Toujours pareil, on commence par calculer le déterminant du système qui, cette fois-ci, dépendra d'un paramètre m.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} &= m \times \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m\left(m^2-1\right) - (m-1) + (1-m) \\ &= (m-1)\left(m(m+1)-2\right) \\ &= (m-1)\left(m^2+m-2\right) \\ &= (m-1)^2(m+2) \end{aligned}$$

Donc $\Delta = 0$ si et seulement si $m = 1$ ou $m = -2$

- Si $m = -2$, alors, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rl} -2x+y+z= & 1 \\ x-2y+z= & 1 \\ x+y-2z= & 1 \end{array}\right.$$

  En additionnant les lignes, nous obtenons $0x + 0y + 0z = 3$, ce qui est impossible. Donc, si $m = -2$, le système n'admet pas de solution.

- Si $m = 1$, alors le système devient ;

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 1 \end{array}\right.$$

  qui se réduit à une seule équation : $x + y + z = 1$. Le système admet donc une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, 1-x-y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

▷ Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système admet une unique solution :

- Calculons Δ_x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 - (m-1) + 1 - m = (m-1)^2$$

D'où $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2\,(m+2)} = \dfrac{1}{(m+2)}$

- Calculons Δ_y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m\,(m-1) - (m-1) = (m-1)^2$$

D'où $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2\,(m+2)} = \dfrac{1}{m+2}$

- Calculons Δ_z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \times \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = m\,(m-1) + (1-m) = (m-1)^2$$

D'où $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2\,(m+2)} = \dfrac{1}{m+2}$

Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système admet une unique solution $x = y = z = \dfrac{1}{m+2}$

Exercice 28 :

Démontrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Pour le calcul, nous allons jouer sur les combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes. Tout d'abord, une combinaison sur les lignes :

$$L'_1 = L_1 \quad L'_2 = L_2 \quad L'_3 = L_3 + L_2 + L_1$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Et maintenant, une combinaison sur les colonnes :

$$C"_1 = C'_1 - C'_3 \quad C"_2 = C'_2 - C'_3$$

Nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -b-c-a & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-a-b-c)^2 = (a+b+c)^2$$

D'où, nous avons bien $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Exercice 29 :

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

Une fois de plus, on utilise combinaison avec lignes et colonnes :

$$L'1 = L_1 \quad L'_2 = L_2 \quad L'_3 = L_3 + L_2$$

Alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 33 :

On dit que 2 matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables, s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$

1. *Montrer que la similitude de matrices est une relation d'équivalence*

   Pour plus de clarté, nous notons $\mathfrak{R}$ la relation :

   $$A\mathfrak{R}B \Longleftrightarrow \text{il existe une matrice inversible } P \text{ telle que } A = P^{-1}BP$$

   ▷ **$\mathfrak{R}$ est évidemment réflexive.**
   En effet, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons $A = \mathrm{Id}_n \times A \times \mathrm{Id}_n$; or, $(\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à elle-même et donc $A\mathfrak{R}A$

   ▷ **Montrons qu'elle est symétrique**
   Supposons donc que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous ayions $A\mathfrak{R}B$.
   Ce ci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. Or :

   $$A = P^{-1}BP \Longleftrightarrow PA = PP^{-1}BP \Longleftrightarrow PA = BP \Longleftrightarrow PAP^{-1} = BPP^{-1} \Longleftrightarrow PAP^{-1} = B$$

   Il existe donc une matrice inversible, P^{-1} telle que $B = \left(P^{-1}\right)^{-1}AP^{-1}$, c'est à dire que $B\mathfrak{R}A$
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc symétrique

   ▷ **Montrons qu'elle est Transitive**
   Supposons donc que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous ayions $A\mathfrak{R}B$ et $B\mathfrak{R}C$.
   Ce ci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$ et une autre matrice inversible Q telle $B = Q^{-1}CQ$.
   Donc $A = P^{-1}BP \Longleftrightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP$. Or, $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$
   Il existe donc une matrice inversible, $R = QP$ telle que $A = R^{-1}CR$, c'est à dire que $A\mathfrak{R}C$
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc symétrique

   La relation $\mathfrak{R}$ étant réflexive, symétrique et transitive, est donc une relation d'équivalence

2. *Montrer que 2 matrices semblables ont même déterminant*

   Soient A et B 2 matrices semblables ; alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.
   Des propriétés des déterminants, nous avons :

   $$\det A = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det P^{-1} \times \det(BP) = \det P^{-1} \times \det B \det P = \det B$$

   2 matrices semblables ont donc même déterminant.

   Remarques sur les matrices semblables et la notion d'invariant
   Nous venons de découvrir 2 types d'invariants pour les matrices semblables : la trace et le déterminant.
   — 2 matrices semblables ont même trace
   — 2 matrices semblables ont même déterminant
   — Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?