Chapitre 5

Matrices, déterminants

Ce chapitre est conçu pour être une introduction au calcul matriciel ; par exemple, nous ne parlerons que de matrices à coefficients réels. Nous retrouverons les matrices dans les espaces vectoriels, en probabilité et, bien sûr, dans les mathématiques appliquées

5.1 Algèbre des matrices ; généralités, vocabulaire

5.1.1 Définition

Un ensemble de mn nombres réels rangés dans un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes est appelé matrice

Exemple 1 :

Exemples de matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice rectangulaire à 3 lignes et 2 colonnes
2. $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est une **matrice carrée** à 3 lignes et 3 colonnes

Remarque 1 :

On écrit le plus souvent : $A = \left((a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ et les $(a_{i,j})$ sont les **coefficients de la matrice** ; le premier indice désigne la ligne, et le second indice, la colonne

5.1.2 Vocabulaire

1. **On dit qu'une matrice rectangulaire à m lignes et n colonnes est une matrice d'ordre $m \times n$. L'ensemble des matrices rectangulaires à m lignes et n colonnes est à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$**
2. **Si $m = n$, autrement dit, s'il y a autant de lignes que de colonnes, on dit que la matrice est carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**
3. **Si la matrice est de la forme $1 \times n$, on dit que c'est un vecteur-ligne**
4. **Si la matrice est de la forme $n \times 1$, on dit que c'est un vecteur-colonne**

Exemple 2 :

- ▷ Exemple de Vecteur-ligne : $\begin{pmatrix} x & \cdots & \cdots & y & z \end{pmatrix}$
- — Exemple de vecteur-colonne : $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ \vdots \\ b \\ c \end{pmatrix}$
- — Comme cas particulier, un nombre *(encore appelé **scalaire**)* peut être considéré comme une matrice 1×1
- — Comme autre cas particulier, on a **la matrice nulle**, c'est à dire celle dont tous les coefficients sont nuls.

  On la note souvent $\mathcal{O}$. Par exemple : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle d'ordre 4×3

5.1.3 Définition de matrice diagonale

On appelle matrice diagonale , une matrice carrée $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}} \right)$ telle que, si $i \neq j$, alors , $a_{i,j} = 0$

Exemple 3 :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont 2 matrices diagonales.
2. On appelle **matrice unité ,** une matrice diagonale $\mathrm{Id}_n = \left((a_{i,j})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}} \right)$ telle que $a_{i,i} = 1$

   $\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 4 .

   La plupart du temps, on note Id_n la matrice unité d'ordre n

5.1.4 Définition

On appelle matrice triangulaire une matrice carrée de la forme

$$T_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{nn1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

— T_s **est dite <u>matrice triangulaire supérieure</u>. Nous avons, dans ce cas,** $a_{i;j} = 0$ **si** $j > i$
— T_i **est dite <u>matrice triangulaire inférieure</u>. Nous avons, dans ce cas,** $a_{i;j} = 0$ **si** $j < i$

Exemple 4 :

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure,
2. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure
3. Les matrices qui sont à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure sont les matrices diagonales.