5.2 Opération sur les matrices

5.2.1 Egalité de 2 matrices

On dit que 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ sont égales et on écrit alors $A = B$ si :

1. **Elles sont de même dimension c'est à dire qu'elles ont toutes deux, même nombre de lignes et même nombre de colonnes**
2. **ET si $(\forall i)\,(\forall j)\,(a_{ij} = b_{ij})$**

Exemple 5 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ▷ $A \neq B$ puisque, par exemple, $1 = a_{11} \neq b_{11} = 2$
- ▷ $A \neq C$ et $B \neq C$, car ces matrices ne sont pas de même dimension

5.2.2 Somme et différence de 2 matrices

1. **On appelle somme de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$, une matrice $C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$**
2. **On appelle différence de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$, une matrice $C' = \left((c'_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ telle que $c'_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$**

Remarque 2 :

Remarque très importante

1. On ne peut additionner ou soustraire, que des matrices de même dimension
2. Pour additionner ou soustraire 2 matrices, on soustrait ou additionne, TERMES àTERMES

Exemple 6 :

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

- Alors, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$
- Et $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1 :

Est-il possible d'additionner les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$? Si oui, en donner la somme.

5.2.3 Propriétés de l'addition des matrices

1. **L'addition des matrices est associative, c'est à dire :**

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C)$$

2. **L'addition des matrices est commutative, c'est à dire :**

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + B) = (B + A)$$

3. **L'addition des matricesadmet un élément neutre : la matrice nulle :$\mathcal{O}$, c'està dire :**

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A)$$

4. **Chaque matrice, admet, pour l'addition une matrice opposée,.**
   C'est à dire :

$$(\forall A \in matmn\mathbb{R})\,(\exists A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + A' = A' + A = \mathcal{O})$$

Démonstration

Démonstration du seul dernier point

En effet, Si $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$, alors, $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ est tel que chaque élément de la matrice $A + A'$ est $\left((c_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ où $c_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$

Remarque 3 :

La matrice $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ est notée $A' = -A$

5.2.4 Groupe additif des matrices

L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ muni de l'addition des matrices est un groupe abélien.

Démonstration

La démonstration en est très simple :
- ▷ L'addition est associative
- ▷ L'addition admet un élément neutre : la matrice nulle $\mathcal{O}$
- ▷ Chaque matrice A admet, pour l'addition une matrice opposée notée $-A$
- ▷ L'addition des matrices est commutative

5.2.5 Produit d'une matrice par un scalaire

On appelle produit d'une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, une matrice $C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$

Remarque 4 :

La matrice C est notée $C = \lambda A$

Exemple 7 :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ -7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, alors, $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 15 & 25 & 45 \\ -35 & 15 & 40 \end{pmatrix}$

5.2.6 Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(1 \times A = A)$
2. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(0 \times A = \mathcal{O})$
3. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall \beta \in \mathbb{R})\,(\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A)$
4. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall \beta \in \mathbb{R})\,((\alpha + \beta)A = (\alpha A + \beta A))$
5. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B)$

Démonstration

La démonstration est simple et très calculatoire et laissée aux soins du lecteur

Remarque 5 :

1. Si $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ est l'opposée de $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$, on a $A' = -1A = -A$ de telle sorte que $A - B$ s'écrive $A + (-B)$
2. On démontrera ultérieurement que, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des scalaires, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

5.2.7 Multiplication des matrices

On appelle produit de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ **et** $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots p}}\right)$**, une matrice** C
$C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots p}}\right)$ **telle que** $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Remarque 6 :

Pour que le produit soit possible, **il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B**

Exercice 2 :

Les produits des matrices AB ou BA suivants sont-ils possibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 6 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

5.2.8 Propriétés du produit matriciel

1. **La multiplication des matrices est associative c'est à dire :**

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))(\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}))(A(BC) = (AB)C = ABC)$$

2. **La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition c'est à dire**

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))(\forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))(A(B+C) = AB + AC)$$

et

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))(\forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))((A+B)C = AC + BC)$$

Remarque 7 :

1. **Très important** :
La multiplication des matrices n'est pas commutative ; il suffit de le vérifier sur le contre-exemple suivant :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; calculer AB et BA
Résolution :
Nous avons $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$
Nous avons bien $AB \neq BA$
2. Muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un **anneau non commutatif**