5.3 Matrices transposées

5.3.1 Définition

Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On appelle matrice transposée de A , la matrice

$$^tA = A^T = \left((a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} \right)$$

Nous avons $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Exemple 8 :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
2. Si u est la matrice ligne $u = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, alors, u^T est la matrice colonne

$$u^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

5.3.2 Propriétés des matrices transposées

1. **La transposée de la transposée est la matrice elle même, c'est à dire :**
   Pour toute matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\left(A^T\right)^T = A$
2. **Pour toute matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ nous avons $(AB)^T = B^T A^T$**

Démonstration

Les démonstrations *(en particulier du premier point)* sont très simples.
Pour le second point, les calculs sont réellement fastidieux ; on peut le faire sur des matrices de dimension raisonnable (2 ou 3).
Pour que le produit AB soit faisable, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B, et le produit AB est donc dans $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, et $(AB)^T$ est donc dans $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$

5.3.3 Définition

1. **Une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A = A^T$**
2. **Une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si $A = -A^T$**

Remarque 8 :

1. Une matrice symétrique est **forcément une matrice carrée.**
2. **Exemple de matrice symétrique :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 3 & -1 & \sqrt[3]{7} \end{pmatrix}$$

5.4 Matrice inverse

5.4.1 Définition

On appelle <u>matrice inverse</u>, d'une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$ et on note alors $B = A^{-1}$

Remarque 9 :

1. Première remarque : on ne parle de matrice inverse que dans les matrices carrées.
2. Pour une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}\right)$ donnée, il n'existe qu'une seule inverse A^{-1}.
3. Mieux, si on considère une inverse à droite ou une inverse à gauche, tout inverse à gauche, est aussi une inverse à droite. Démontrez le ! !

Exercice 3 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{Id}_2$?
2. Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?
3. Trouver les conditions sur a, b, c, d pour que les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admettent un inverse ; lorsque l'inverse existe, donner A^{-1}
4. Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

5.4.2 Propriétés

1. **Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes deux inversibles ; on a alors,$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**
2. **La transposée de l'inverse estégale à l'inverse de la transposée, c'est à dire $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$**

<u>Démonstration</u>

1. La première démonstration est simple : il suffit de calculer le produit $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)$
2. Pour la seconde démonstration, nous partons du fait que $\left(AA^{-1}\right)^T = (\mathrm{Id}_n)^T = \mathrm{Id}_n$.
   Or, $\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T \times A^T = \mathrm{Id}_n$. Nous avons donc bien $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

5.5 Puissance d'une matrice

5.5.1 Définition

1. **Soit** $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \right)$ **une matrice carrée de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **; pour** $p \in \mathbb{N}$ **, on note** $A^P = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$
2. **En particulier,** $A^0 = \mathrm{Id}_n$
3. **Et si** A **est inversible, pour** $p \in \mathbb{Z}^-$ **(entiers négatifs)** $A^p = \left(A^{-1}\right)^{-p}$ **ou encore, si** $p \in \mathbb{N}$ $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p$

5.5.2 Propriétés évidentes des puissances de matrices

Pour toute matrice carrée $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \right)$ **de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**, nous avons**

1. **Pour tout** $p \in \mathbb{N}$ **et tout** $q \in \mathbb{N}$, $(A^p)^q = A^{pq}$
2. **Pour tout** $p \in \mathbb{N}$ **et tout** $q \in \mathbb{N}$, $(A^p)(A^q) = A^{p+q}$
3. **Si** A **est inversible, on a le même résultat pour tout** $p \in \mathbb{Z}$ **et tout** $q \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

1. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ et généraliser pour calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$
2. Question complémentaire : la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

5.5.3 Binôme de Newton

Si A **et** B **sont des matrices carrées de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **qui commutent c'est à dire telles que** $AB = BA$ **; nous avons alors la formule du Binôme de NEWTON :**

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Remarque 10 :

C'est un résultat déjà exposé dans la leçon sur les anneaux

Exercice 5 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n
2. Calculer $(A - \mathrm{Id}_2)^2$
3. En déduire A^{-1}