5.6 Exercices sur le calcul matriciel

Exercice 6 :

Calculer le produit AB et BA des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

Vérifier l'associativité du produit sur les exemples suivants

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :

Trouver les matrices carrées d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :

1. $A^2 = A$
2. $A^2 = \mathrm{Id}_2$
3. $AB = BA$, avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;Trouver les matrices B et B' telles que $BA = \mathrm{Id}_2$ et $AB' = \mathrm{Id}_3$

Exercice 10 :

Soit a un nombre réel non nul et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
Calculer A^n pour tout **entier relatif** n.

Exercice 11 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. calculer A^2
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 12 :

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des matrices forme un sous-corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble G des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe ; est-il commutatif ?

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice B telle que $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$
2. Calculer B^2 et B^3
3. En déduire la valeur de A^n en fonction de n

Exercice 15 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, trouver 3 matrices, A, B et C, telles que $X = aA + bB + cC$ où

$$X = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

Exercice 16 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer AA^T et A^TA
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, le produit AA^T est symétrique

Exercice 17 :

Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Exercice 18 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 19 :

On définit 3 suites de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = w_{n-1} \end{cases}$$

Le but du problème est d'exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

1. Trouver une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$ et en déduire que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $(M + \mathrm{Id}_3)^n$ et en déduire que $A^n = \mathrm{Id}_3 + nM + \dfrac{n(n-1)}{2} M^2$; en déduire u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

Exercice 20 :

Trace d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

On appelle Trace de A , la somme des éléments diagonaux, c'est à dire le nombre $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

1. Montrer que pour toute matrice A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$$\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A + B)$$
2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
4. Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right)$$

Exercice 21 :

Nous nous situons dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ on considère les matrices $E_{i,j} = \left((e_{k,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}\right)$ où $e_{k,l} = 1$ si $k = 1$ et $l = j$ et $e_{k,l} = 0$ sinon

- Une **matrice de dilation d'ordre α** est une matrice $D_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$D_i = \mathrm{Id}_n - (1 - \alpha) E_{i,i}$$
Exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Une matrice de dilatation D_2 d'ordre α est une matrice du type :
$$D_2 = \mathrm{Id}_3 - (1 - \alpha) E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Une **matrice de transvection d'ordre α** est une matrice $T_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$T_{i,j} = \mathrm{Id}_n + \alpha E_{i,j} \text{ avec } i \neq j$$
Exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
Une matrice de transvection $T_{2,1}$ d'ordre α est une matrice du type :
$$T_{2,1} = \mathrm{Id}_3 + \alpha E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Faites les calculs matriciels suivants :

1. D_2A 2. AD_2 3. $AT_{2,1}$ 4. $T_{2,1}A$

Quelles sont vos conclusions ?

Exercice 22 :

Dans ce problème, on ne considère que les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. (a) Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$
   (b) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
2. L'objet de cette question est de trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2$$

   Où $B = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Trouver $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 + C$ où Id_2 est la matrice identité d'ordre 2
   (b) En déduire toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 - 6X + B = \mathcal{O}$
3. Proposer une méthode de résolution d'équations dont l'inconnue est une matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $X^2 + aX + B = \mathcal{O}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
4. Appliquer cette méthode à la résolution de $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ où $C = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$