5.7 Déterminant d'une matrice

L'exposé que nous faisons ici, n'a rien de théorique ! Il est seulement l'exposé de base donnant les modes de calcul, et surtout, les propriétés des déterminants !

5.7.1 Définition des déterminants

Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}}\right)$ **une matrice carrée de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**.**
On appelle <u>déterminant</u> de A**, le nombre**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & a_{ij} & \ddots & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On dit qu'on a là, un déterminant d'ordre n

Remarque 11 :

Ecrit comme cela, un déterminant ne nous dit rien ! !

5.7.2 Comment calculer un déterminant ?

Pour calculer un déterminant, on prend une colonne ,(la colonne N ˚ j **par exemple) ou une ligne, (la ligne N ˚** i**) et on a alors :**

1. **<u>Si on choisit la colonne N ˚ j</u>, alors** $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$
2. **<u>Si on choisit la ligne N ˚ i</u>, alors** $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$

Où, Δ_{ij} **est le déterminant obtenu à partir de celui de** A **en supprimant la ligne N ˚** i **et la colonne N ˚** j **, appelé <u>déterminant mineur</u>**

Remarque 12 :

1. On définit un déterminant d'ordre n à partir de combinaison linéaire de déterminants d'ordre $n-1$; ce qui ne nous avance pas ! !
2. On appelle **<u>cofacteur</u>** de A le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$
3. Ces cofacteurs définissent une matrice $\left((A_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}\right)$ appelée **matrice des cofacteurs** ou **co-matrice**

Les comatrices seront étudiées ultérieurement.

Exemple 9 :

Il vaut mieux commencer par des choses simples ! !

1. Calculons le déterminant de la matrice d'ordre 2 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

   En utilisant la définition, nous avons $\det A = 1\times 4 + (-1)^{1+2}\times 3\times 2 = -2$
2. Généraliser à $X = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Toujours en utilisant la définition, nous avons $\det A = a \times d + (-1)^{1+2} \times c \times b = ad - bc$
C'est un résultat sur les déterminants d'ordre 2 qu'il faut retenir

3. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre 3 $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

   Nous allons ré-utiliser la définition en développant suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 6 \times (-5) + 1 \times (-17) = 31$$

5.7.3 Propriétés des déterminants

Sans démontrer les résultats anoncés, nous le vérifions sur des déterminants d'ordre 2

1. **Si on permute 2 colonnes ou 2 lignes d'un déterminant, le déterminant change de signe**

   Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

2. **Si on multiplie une ligne ou un colonne par une constante, le déterminant est multiplié par cette constante.**

   Exemple :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix}$$

3. **On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes**

   Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. **Nous avons aussi,** $\det A = \det \left(A^T\right)$

Exercice 23 :

Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire *(supérieure ou inférieure)*

Résolution

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire inférieure. Alors, en développant suivant la première ligne, nous obtenons :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} = acf$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est le produit de ses éléments diagonaux
Ce résultat peut être généralisé à toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple 10 :

Utilisation de 5.7.3 pour le calcul des déterminants
Soit A une matrice carrée d'ordre n. D'après les propositions précédentes 5.7.3, on peut donc utiliser des combinaisons linéaires pour calculer $\det(A)$. On se ramène ainsi, au mieux, à un calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.
Exemple :
Calcul de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Résolution
On soustrait la colonne 2 à la colonne 1 (c'est à dire que nous faisons : $C_1 - C_2 \to C_1$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

On soustrait la colonne 3 à la colonne 2 ($C_2 - C_3 \to C_2$). D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En utilisant un facteur commun ($a-b$ dans C_1 et $b-c$ dans C_2), nous avons :

$$\Delta = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

Or, en développant suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} = (c-a)$$

et donc, $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$

Exercice 24 :

Faites, par la méthode de combinaisons linéaires, le calcul du déterminant de la matrice d'ordre 3 suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.7.4 Conséquences

1. **Un déterminant dont une ligne ou une colonne est nulle est nul**
2. **Un déterminant dont deux lignes ou deux colonnes sont égales est nul**
3. **Un déterminant dont une ligne ou une colonne sont combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes est nul**
4. **Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$**

Démonstration

On admet ces résultats ; cependant, on peut les démontrer facilement pour les déterminants d'ordre 2

5.7.5 Théorème

Etant données 2 matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A \times B) = (\det A)(\det B)$

Démonstration

De la même manière, on admet ces résultats ; cependant, qui peuvent être démontrés facilement à l'ordre 2

Remarque 13 :

Une matrice inversible a forcément un déterminant non nul.

En effet, si A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$. Donc

$$\det AA^{-1} = \det \mathrm{Id}_n \Longleftrightarrow \det A \times \det A^{-1} = 1$$

Ce qui montre bien que $\det A$ et $\det A^{-1}$ sont non nuls

La proposition ci-après précise les choses

5.7.6 Proposition

Nous avons :

1. **A est inversible si et seulement si** $\det(A) \neq 0$
2. **Si A est inversible alors** $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
3. **Si A et B sont semblables c'est à dire il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}AP$ alors** $\det(A) = \det(B)$

Démonstration

1. Nous avons démontré que si A était inversible, alors $\det A \neq 0$
   Nous admettons, pour le moment, la réciproque, à savoir : $\det A \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible
2. Dans la remarque précédente, nous avons vu que $\det A \times \det A^{-1} = 1$, c'est à dire que
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$
3. Supposons qu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$; alors, en utilisant les propriétés du déterminant :
$$\begin{aligned} \det B = & \det\left(P^{-1}AP\right) \\ = & \det\left(P^{-1}\right) \times \det(AP) \\ = & \det\left(P^{-1}\right) \times \det A \times \det P \\ = & \det\left(P^{-1}\right) \times \det P \times \det A \\ = & \det A \end{aligned}$$