5.8 Systèmes de Cramer

L'objet de cette section est de réutiliser la notion de déterminant. Nous ne le ferons que dans des cas simples *(ordre 2 et ordre 3)*

5.8.1 Système de cramer d'ordre 2

On appelle système de Cramer d'ordre 2 tout système

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+by= & c \\ a'x+b'y= & c' \end{array}\right.$$

d'inconnues x et y et de coefficients $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $a'\in\mathbb{R}$, $b'\in\mathbb{R}$, $c'\in\mathbb{R}$

1. **Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$**
2. **Si $\Delta\neq 0$, alors le système admet un unique couple de solutions $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donné par :**

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

   - **Δ_x est appelé le déterminant en x et est donné par : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$**
   - **Δ_y est appelé le déterminant en y et est donné par : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$**
3. **Si $\Delta = 0$, alors le système peut n'avoir aucune solution ou une infinité de solutions**
   - **Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors, le système n'admet aucune solution**
   - **Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ alors, le système admet une infinté de solutions**

Démonstration

Considérons donc le système

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+by= & c \\ a'x+b'y= & c' \end{array}\right.$$

Nous allons tenter de le résoudre en éliminant les inconnues. On suppose a et a' non nuls *(Si l'un des deux était nul, il suffirait de permuter les colonnes)*

1. Tout d'abord, éliminons x en multipliant la première ligne par a' et la seconde ligne par $-a$. Nous obtenons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} a'ax+a'by= & a'c \\ -aa'x-ab'y= & -ac' \end{array}\right.$$

   En additionnant, nous obtenons : $(a'b-ab')\,y=a'c-ac'$. Ainsi :
   - ▷ Si $a'b-ab'\neq 0$, alors $y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

     Et c'est là qu'on remarque que $ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ et que $ac'-a'c=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$. Nous avons donc bien $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$
   - ▷ Si $a'b-ab'=0$, alors, alors l'équation devient $0y=a'c-ac'$
     - Donc, si $a'c-ac'=0$, c'est à dire si $\Delta_y=0$, il y a une infinité de solutions
     - Donc, si $a'c-ac'\neq 0$, c'est à dire si $\Delta_y\neq 0$, il n'y a aucune solution
2. La discussion serait la même pour le calcul de x

D'où le résultat annoncé.

Remarque 14 :

On remarque que pour former Δ_x, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue x par les constantes c et c'. Idem pour Δ_y, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue y par les constantes c et c'

Exemple 11 :

Voici donc quelques exemples de résolution.

1. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 2 \\ x-7y = & 1 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -17$. Comme $\Delta \neq 0$, il y a un unique couple solution donné par :

   $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-17}{-17} = 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{0}{-17} = 0$$

2. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 2 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$. Comme $\Delta = 0$, il y a un problème!!

   $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 0$

   Il y a donc une infinité de solutions. Comment les exprimer ?

   Il est clair que nous avons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 2 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 2 \\ 2x+3y = & 2 \end{array}\right.$$

   Et que le système ne se réduit qu'à une seule équation $2x+3y = 2$. L'ensemble des solutions est donc donné par :

   $$S = \left\{\left(x, \frac{1}{3}(2-2x)\right) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}(2-3y), y\right) \text{ où } y \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 1 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$. Comme $\Delta = 0$, il y a un problème!!

   $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = -12$

   Nous avons $\Delta_x \neq 0$, et il n'y a donc pas de solutions.

   Nous pouvons voir qu'en divisant par 4 la seconde équation, nous obtenons le système $\left\{\begin{array}{rl} 2x+3y = & 1 \\ 2x+3y = & 2 \end{array}\right.$

   Nous ne pouvons, évidemment, avoir en même temps $2x+3y = 1$ et $2x+3y = 2$, ce qui montre bien l'impossibilité du système.

5.8.2 Système de cramer d'ordre 3

On appelle système de Cramer d'ordre 3 tout système

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+by+cz = & d \\ a'x+b'y+c'z = & d' \\ a''x+b''y+c''z = & d'' \end{array}\right.$$

d'inconnues x, y et z et de coefficients $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $a' \in \mathbb{R}$, $b' \in \mathbb{R}$, $c' \in \mathbb{R}$ $a'' \in \mathbb{R}$, $b'' \in \mathbb{R}$, $c'' \in \mathbb{R}$

1. **Le déterminant du système est donné par** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$
2. **Si** $\Delta \neq 0$**, alors le système admet un unique triplet de solutions** $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ **donné par :**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad \textbf{et} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

   — Δ_x **est appelé le <u>déterminant en x</u> et est donné par :** $\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

   — Δ_y **est appelé le <u>déterminant en y</u> et est donné par :** $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$

   — Δ_z **est appelé le <u>déterminant en z</u> et est donné par :** $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$
3. **Si** $\Delta = 0$**, alors le système peut n'avoir aucune solution ou une infinité de solutions**
   — **Si** $\Delta_x \neq 0$**,** $\Delta_y \neq 0$ **ou** $\Delta_z \neq 0$ **alors, le système n'admet aucune solution**
   — **Si** $\Delta_x = 0$ **et** $\Delta_y = 0$ **et** $\Delta_z \neq 0$ **alors, le système admet une infinté de solutions**

Remarque 15 :

Comme précédemment, pour former Δ_x, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue x par les constantes d, d' et d''. La procédure est la même pour Δ_x, Δ_z

Exemple 12 :

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x + 2y + z = & 8 \\ x - 2y + z = & -4 \\ -x + 2y - z & = 4 \end{cases}$

   Résolution

   ▷ Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. On voit de suite que 2 colonnes sont égales, donc $\Delta = 0$

   ▷ Nous avons $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
   La 1° colonne est 2 fois la troisième plus 3 fois la seconde. La première colonne est donc combinaison linéaire des deux autres, donc $\Delta_x = 0$

   ▷ Nous avons $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.
   Une nouvelle fois, 2 colonnes soont égales donc $\Delta_y = 0$

   ▷ Nous avons $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.
   La 3° colonne est 2 fois la première plus 3 fois la seconde. Donc $\Delta_z = 0$.
   Il faudrait remarquer que Δ_x et Δ_z sont les mêmes, à une permutation de colonnes près.

   Le système admet donc une infinité de solutions.
   Nous pouvons remarquer que la 3° ligne est l'opposée de la seconde ligne, et que donc le système des 3 équations ne se réduit qu'à un système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + z = & 8 \\ x - 2y + z = & -4 \\ -x + 2y - z & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = & 8 \\ x - 2y + z = & -4 \end{cases}$$

Fixons $z \in \mathbb{R}$. z devient, en quelques sortes, un paramètre. Le système devient : $\left\{\begin{array}{rr} x+2y= & 8-z \\ x-2y= & -4-z \end{array}\right.$

D'où on tire, par addition simple $x = 2-z$ et $y = 3$. L'ensemble S des solutions du système est donc :

$$S = \{(2-z, 3, z)\} \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$