5.9 Exercices sur les déterminants

Les exercices proposés ici n'ont rien de vraiment difficile. Seuls les plus représentatifs et les plus percutants le sont ! !

5.9.1 Sytèmes de Cramer

Exercice 25 :

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rl} x+2y+z= & 8 \\ x-2y+z= & -4 \\ -x+2y-z= & 2 \end{array}\right.$

Exercice 26 :

Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rl} mx+y= & 1 \\ x+my= & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rl} (m-2)\,x+my= & -m \\ mx+(m-2)\,y= & 3m-2 \end{array}\right.$

Exercice 27 :

1. Résoudre le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y+z= & 1 \\ x-y+z= & 1 \\ x+y-z= & 1 \end{array}\right.$$
2. Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} mx+y+z= & 1 \\ x+my+z= & 1 \\ x+y+mz= & 1 \end{array}\right.$$

5.9.2 Pratique des déterminants

Exercice 28 :

1. Démontrer que $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc\,;$
2. Démontrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Exercice 29 :

Calculer
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 30 :

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
2. Pour chacune des matrices ci-dessus, dire si elles ont inversibles, et si oui calculez-en l'inverse.

Exercice 31 :

Vérifier sur un exemple que $\det(A \times B) = (\det A)(\det B)$ *On pourra le vérifier sur des matrices carrées d'ordre 2, puis d'ordre 3*

Exercice 32 :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 33 :

On dit que 2 matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables, s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$

1. Montrer que la similitude de matrices est une relation d'équivalence
2. Montrer que 2 matrices semblables ont même déterminant

Exercice 34 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $A^2 - \operatorname{tr}(A)\, A + \det A \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$ où $\operatorname{tr}(A)$ est la trace de la matrice A et $\mathcal{O}_2$ la matrice nulle d'ordre 2.