Chapitre 6

Espaces vectoriels réels

La notion **d'espace vectoriel** est essentielle en mathématiques ; en fait, **tout est vecteur**, et cette modélisation géométrique est un excellent outil, très utilisé dans l'approximation en analyse. Chapitre important, donc !

6.1 Espace vectoriel

6.1.1 Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un triplet $(E, +, \bullet)$ formé d'un ensemble E, d'une loi de composition interne $+$, d'une loi d'action notée $\bullet$ qui va de $\mathbb{R} \times E$ dans E, tels que :

1. $(E, +)$ **est un groupe commutatif,**
2. **La loi d'action $\bullet$ vérifie les propriétés suivantes :**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (a, u) & \longmapsto & au \end{array}$$

   (a) $\forall u \in E,\ 1 \bullet u = u$
   (b) $\forall u \in E$,$\forall v \in E,\ \forall a \in \mathbb{R}$, $a \bullet (u + v) = a \bullet u + a \bullet v$ **(distributivité)**
   (c) $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}$, $a \bullet (b \bullet u) = (ab) \bullet u$ **(associativité)**
   (d) $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ (a + b) \bullet u = a \bullet u + b \bullet u$

Remarque 1 :

1. La dernière propriété est une pseudo-distributivité car l'addition à gauche de l'égalité est celle des réels tandis que celle à droite est celle des vecteurs.
2. Un espace vectoriel se définit de façon plus générale sur un corps commutatif ; par exemple sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ avec p nombre premier. Ce corps commutatif est appelé **corps des scalaires.**
3. A partir de maintenant, nous écrivons plutôt . que $\bullet$
4. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathbb{R}$-espace vectoriel

6.1.2 Proposition

On relève les conséquences immédiates des propriétés d'espace vectoriel :

1. $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ a\,(u - v) = au - av$
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ a.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
3. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ a\,(-u) = (-au)$
4. $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a - b)\,u = au - bu$

5. **$\forall \overrightarrow{u} \in E$, nous avons $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (où $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul)**
6. **$\forall u \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-a).\overrightarrow{u} = -(a\overrightarrow{u})$; en particulier, $\forall u \in E$, et pour $a = 1$, $(-1).\overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{u})$(symétrique de $\overrightarrow{u}$ pour $+$)**
7. **$\forall u \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-a)(-u) = au$**
8. **$a.u = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a = 0$ ou $u = \overrightarrow{0}$**
9. **On appelle homothétie une application h_a où $a \in \mathbb{R}$**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_a : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & h_a(u) = au \end{array} \right.$$

h_a est bijective si et seulement si $a \neq 0$

Démonstration

On ne démontre pas toutes les propriétés.

1. Démonstration du premier résultat :
   en effet : $\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u} = (1+0).\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ d'où le résultat.
2. En effet : $a.\overrightarrow{0} + a.\overrightarrow{0} = a.\left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\right) = a.\overrightarrow{0}$, d'où le résultat.
3. En effet : $\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u} = (1-1).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
4. Montrons qu'une homothétie de rapport $a \neq 0$ est une bijection
   - ▹ Montrons qu'elle est injective.
     Soient u_inE et $v \in E$ tels que $h_a(u) = h_a(v)$, c'est à dire que $au = av$, et donc $a(u-v) = \overrightarrow{0}$; comme $a \neq 0$ alors $u - v = \overrightarrow{0}$ et donc $u = v$ et h_a est injective
   - ▹ Montrons qu'elle est surjective.
     Soit $u \in E$; on pose $w = \dfrac{1}{a}u$ et donc, on démontre facilement que $h_a(w) = u$ et donc que si $a \neq 0$, h_a est surjective

   Donc, si $a \neq 0$, h_a est bijective

Exemple 1 :

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Pour tout entier n, l'ev $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
2. L'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
4. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
5. L'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
6. $\mathbb{R}[X]$ ensemble des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 1 :

Etant donnés les couples $A = (-2, 3, 7)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (-7, -4, 5)$, déterminer le triplet X défini par

1. $X = 5A + B$
2. $3X + 2A - B = 0$
3. $7X + C - 2B = 0$

6.2 Sous espaces vectoriels

6.2.1 Définition

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(F, +', \bullet')$ un second $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
$(F, +', \bullet')$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si :

1. **$F \subset E$**
2. **$+'$ est la restriction sur F de $+$, c'est à dire : $\forall u, v \in F$,nous avons $u +' v = u + v$**
3. **$\bullet'$ est la restriction sur F de $\bullet$, c'est à dire : $\forall \overrightarrow{u} \in F$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \bullet' \overrightarrow{u} = a \bullet \overrightarrow{u}$**

Remarque 2 :

En fait F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset E$ **et** F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec **les mêmes lois** que celles de E

6.2.2 Proposition importante

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Un sous ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. **$F \neq \emptyset$**
2. **F est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :**
   (a) $(\forall u \in F)\,(\forall v \in F)\,(u + v \in F)$
   (b) $\forall u \in F$, $\forall a \in \mathbb{R}$, **nous avons ,** $a.u \in F$

Remarque 3 :

1. C'est presque toujours la vérification de $\overrightarrow{0} \in F$ qui permet de voir que F est non vide.
2. Si nous réussissons à démontrer que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ **n'est pas dans** F, alors on peut être sûr que F n'est pas un sous-espace vectoriel, car un espace vectoriel contient forcément le vecteur nul
3. Après avoir montré que $F \neq \emptyset$, au lieu des deux dernières conditions on peut donner une condition unique que nous utilisons le plus souvent :

$$\boxed{(\forall u, v \in F)\,(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(a.u + b.v \in F)}$$

4. Très souvent, pour montrer que nous avons affaire à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , nous démontrerons que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel bien connu
5. Comment alors démontrer qu'un sous-ensemble F est une sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ?
   (a) Premièrement, on démontre que $F \neq \emptyset$, et pour ce faire, on se précipite sur le vecteur nul $\overrightarrow{0}$
      i. En effet, si $\overrightarrow{0} \in F$, on démontre $F \neq \emptyset$ et que F est **peut-être** un sous-espace vectoriel
      ii. Et si $\overrightarrow{0} \notin F$, alors, F n'est sûrement pas un sous-espace vectoriel , puisque, dans un sous-espace vectoriel , **nous avons toujours** $\overrightarrow{0} \in F$
   (b) Puis on étudie la stabilité par combinaison linéaire
      i. On prend $u \in F$ et $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
      ii. Et on vérifie que $\lambda u + \mu v \in F$

Exemple 2 :

Premiers exemples de sous-espaces vectoriels

1. L'espace des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel , car il est non vide *(il suffit de choisir la fonction nulle)* et la somme de 2 fonctions continues est une fonction continue. De même pour le produit d'une fonction continue par une constante réelle quelconque est aussi une fonction continue.
2. L'espace des fonctions bornées sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$
3. L'espace des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
4. L'espace de polynômes de degrés inférieur ou égal à n.

Exemple 3 :

1. **Montrer que** $F_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } x+2y=0\right\}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^2$
   (a) Premièrement, on démontre que $F_1 \neq \emptyset$, et pour ce faire, on se précipite sur le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ est donné par $\overrightarrow{0}=(0,0)$. Et nous avons bien $(0,0)\in F_1$ puisque $(0,0)$ vérifie bien la relation de définition de F_1 qui est $x+2y=0$
   (b) Soient $u\in F_1$ et $v\in F_1$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$ et on vérifie que $\lambda u+\mu v\in F_1$
   — Nous avons $u=(x,y)$ et $x+2y=0$, car $u\in F_1$. De même, si $v=(x',y')$, nous avons $x'+2y'=0$, car $v\in F_1$
   — $\lambda u+\mu v=\lambda(x,y)+\mu(x',y')=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y')$
   — Vérifions que $\lambda u+\mu v\in F_1$
   $(\lambda x+\mu x')+2(\lambda y+\mu y')=\lambda(x+2y)+\mu(x'+2y')=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$
   Donc, $\lambda u+\mu v\in F_1$
   Donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
2. **L'espace des suites bornées est un sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   Qu'est ce qu'une suite bornée ? ? Donnons en la définition formalisée :
   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ est bornée } \iff (\exists M_u>0)(\forall n\in\mathbb{N})(|u_n|\leqslant M_u)$$
   Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   (a) Premièrement, c'est bien un ensemble non vide puisque la suite nulle $\mathcal{O}$ est bien une suite bornée
   (b) Secondement, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées, c'est à dire telles que
   — $(\exists M_u>0)(\forall n\in\mathbb{N})(|u_n|\leqslant M_u)$
   — $(\exists M_v>0)(\forall n\in\mathbb{N})(|v_n|\leqslant M_u)$
   Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$ et on vérifie que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons, en utilisant l'inégalité triangulaire, $|\lambda u_n+\mu v_n|\leqslant|\lambda u_n|+|\mu v_n|$
   D'autre part, $|\lambda u_n|=|\lambda|\,|u_n|$ et $|\mu v_n|=|\mu|\,|v_n|$
   Donc, $|\lambda u_n+\mu v_n|\leqslant|\lambda|\,|u_n|+|\mu|\,|v_n|$
   Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\lambda u_n+\mu v_n|\leqslant|\lambda|\,M_u+|\mu|\,M_v$, ce qui montre que la suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
   L'ensemble des suites brnées est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
3. On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrez que $F_1=\{f\in\mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ est paire }\}$ sous-espace vectoriel
   Une fonction paire est une fonction telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous ayions $f(-x)=f(x)$
   (a) Tout d'abord, F_1 est non vide, puisque la fonction nulle $\mathcal{O}$ est paire, car, pour tout $x\in\mathbb{R}$
   $$\mathcal{O}(-x)=\mathcal{O}(x)=0$$

(b) Montrons que F_1 est stable par combinaison linéaire
Soient $f \in F_1$ $g \in F_1$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}(af+bf)(-x) &= (af)(-x)+(bf)(-x) \\ &= af(-x)+bf(-x) \\ &= af(x)+bf(x) \\ &= (af)(x)+(bf)(x) \\ &= (af+bf)(x)\end{aligned}$$

Nous avons bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(af+bf)(-x) = (af+bf)(x)$, ce qui montre que $af+bg$ est paire, et que F_1 est stable par combinaison linéaire.

F_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$

Exercice 2 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x-2y=2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
2. L'ensemble $F_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x-2y=0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Soient $u=(2,-1)$ et $v=(2,1)$; nous avons $u \in F_1 \cup F_3$ et $v \in F_1 \cup F_3$; avons nous $u+v \in F_1 \cup F_3$? Que pensez-vous de la réunion de 2 sous-espace vectoriels ?

6.2.3 Proposition

Exemple très important de sous-espace vectoriel : l'intersection de 2 sous-espace vectoriels
L'intersection de deux sous-espace vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2, 2 sous-espace vectoriels de E ; considérons donc $F_1 \cap F_2$

1. Tout d'abord,$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$; en effet, comme ce sont 2 sous-espace vectoriels , alors, $\overrightarrow{0}$ appartient à F_1 et $\overrightarrow{0}$ appartient à F_2, et donc $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$
2. En second lieu, soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in F_1 \cap F_2$ et $\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$
Alors, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_1$, car $\overrightarrow{u} \in F_1$ et $\overrightarrow{v} \in F_1$ et que F_1 est un sous-espace vectoriel . De même, et pour les mêmes raisons, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_2$; donc $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$; ce que nous voulions.

6.2.4 Sous espaces de $\mathbb{R}^n$

1. **Étant donnés des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant l'équation :$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est appelé hyperplan de $\mathbb{R}^n$.**
2. **Plus généralement, on peut définir les sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de plusieurs hyperplans. Ainsi les solutions d'un système de n équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.**

Exemple 4 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan a pour équation $ax+by+cz=0$, qui est donc appelé plan. L'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^3$ est donc le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{array}\right.$$

qui est, en fait, l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

2. Dans le cas précédent, nous avons affaire à l'intersection de 2 sous-espace vectoriels . En effet $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax+by+cz=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de même que $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a'x+b'y+c'z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Les éléments de $F_1 \cap F_2$ vérifient :
   $$F_1 \cap F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax+by+cz=0 \textbf{ et } a'x+b'y+c'z=0\right\}$$
   Les éléments de $F_1 \cap F_2$ sont donc les solutions du système.