6.4 Familles génératrices, Familles libres

6.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Une famille $\{u_1, .., u_p\}$ de vecteurs de E telle que $\text{Vect}\left(\{u_1, .., u_p\}\right) = E$ est appelée famille génératrice de E.
Autrement dit
La famille $\{u_1, .., u_p\}$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

6.4.2 Définition

On dit que E $\mathbb{R}$-espace vectoriel , est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie d'éléments de E.

Remarque 6 :

Si E est de dimension finie et non réduit à $\overrightarrow{0}$, il existe alors $\{u_1, .., u_p\}$ dans E tels que $\text{Vect}\left(\{u_1, .., u_p\}\right) = E$, c'est à dire que tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Cette écriture, à priori, n'est pas unique

Exemple 8 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 2)$ et $u_3 = (1, 1)$ est génératrice, car tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x, y) = \frac{x}{2}u_1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{4}\right) u_2 + \frac{x}{2}u_3$, et cette écriture n'est pas unique, puisque nous avons aussi $(x, y) = \frac{x}{3}u_1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{x}{3}\right) u_2 + \frac{2x}{3}u_3$
2. L'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. En effet si $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$, tout polynôme du second degré s'écrit : $P = ae_2 + be_1 + ce_0$
3. L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

   Supposons, au contraire, que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie.
   Alors il existe $e_0, e_1, \ldots, e_n$ qui engendrent $\mathbb{R}[X]$.
   On appelle $q = \max_{k=0,\ldots,n} (\deg e_k)$, alors $Q(X) = X^{q+1}$ ne peut pas s'écrire en fonction des $e_0, e_1, \ldots, e_n$.
   Il y a donc contradiction et $\mathbb{R}[X]$ est de dimension finie

6.4.3 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. **Deux vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ sont dits linéairement indépendants si et seulement si l'implication suivante est vraie :**

$$(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) (a.u + b.v = 0 \Rightarrow a = b = 0)$$

2. **Plus généralement, n vecteurs $u_1 \in E, \ldots u_n \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si l'implication suivante est vraie :**

$$(\forall a_1 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}) (a_1.u_1 + \ldots + a_n.u_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0)$$

Remarque 7 :

1. La **dépendance linéaire** est le contraire de l'indépendance linéaire : n vecteurs $u_1, \dots u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si

$$(\forall a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R})\,(a_1.u_1 + \ldots + a_n.u_n = 0 \text{ et il existe } k = 1 \ldots n \text{ tel que } a_k \neq 0)$$

2. Un ensemble de vecteurs linéairement indépendant est une **famille libre**, sinon c'est une **famille liée**.
3. 2 vecteurs u et v sont colinéaires, si et seulement si, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v \iff u - \lambda v = \overrightarrow{0}$.
   2 vecteurs colinéaires ne peuvent donc pas être indépendants.
4. On peut donner une définition analogue :
   Deux vecteurs u et$v$ sont colinéaires si et seulement si $u \in \text{Vect}\,(v)$ ou si $v \in \text{Vect}\,(u)$.
5. La définition de la dépendance linéaire est équivalente à celle-ci : n vecteurs $u_1, \dots u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres : c'est à dire s'il existe $k \in \{1 \ldots n\}$ tels que

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n$$

6. 3 vecteurs linéairement dépendants ne sont pas nécessairement colinéaires 2 à 2.
   - Dans $\mathbb{R}^2$, la famille des 3 vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ et $e_3 = (0, 1)$. Cette famille n'est pas libre, car $e_2 = e_1 + e_3$.
     Par contre, ils sont 2 à 2 non colinéaires.*(cf figure 6.1)*

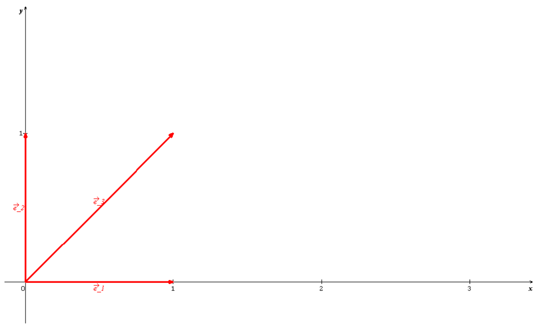

FIGURE 6.1 – La représentation des vecteurs e_1, e_2 et e_3

   - De même, dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ et $u_3 = (7, 8, 9)$; le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est lié car $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$, alors que chacun des systèmes $\{u_1, u_3\}$, $\{u_1, u_2\}$, $\{u_2, u_3\}$ est libre
7. Le vecteur nul ne peut pas appartenir à une famille libre.
   En effet, prenons $\mathbb{R}^3$, avec les vecteurs $i = (1, 0, 0)$ et $j = (0, 1, 0)$. Alors, la famille $\left\{\overrightarrow{0}, i, j\right\}$ n'est pas libre, puisque :
$$25 \times \overrightarrow{0} + 0 \times i + 0 \times j = \overrightarrow{0}$$
8. De la même manière, un même élément ne peut pas apparaître deux fois dans une famille libre.
   Prenons toujours $\mathbb{R}^3$, avec les vecteurs $i = (1, 0, 0)$ et $j = (0, 1, 0)$. Alors, la famille $\{i, i, j\}$ n'est pas libre, puisque :
$$25i - 25i + 0 \times j = \overrightarrow{0}$$
9. Une famille extraite d'une famille libre est libre.

Exercice 6 :

Montrez que les vecteurs $u = (3, 1, 2, 0)$, $v = (0, 0, -1, 1)$ et $w = (0, 0, 0, 2)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$

6.4.4 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
Le rang de la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est le plus grand nombre de vecteurs de cette famille linéairement indépendants.

6.4.5 Proposition

On considère une famille libre de n vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E .
Alors, tout vecteur de $\mathrm{Vect}\left(\{u_1, \dots, u_n\}\right)$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des $u_1, \dots u_n$.

Démonstration

Soit $X \in \mathrm{Vect}\left(\{u_1, \dots, u_n\}\right)$, et on suppose que X admet deux décompositions suivant $\{u_1, \dots, u_n\}$, c'est à dire : $X = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$
Alors, en transposant, nous avons : $(x_1 - y_1)\, u_1 + \ldots + (x_n - y_n)\, u_n = \overrightarrow{0}$.
De l'indépendance des $\{u_1, \dots, u_n\}$, on tire :$(x_1 - y_1) = \ldots = (x_n - y_n) = 0$, c'est à dire que pour tout $k = 1 \ldots n$, $x_k = y_k$

Remarque 8 :

1. Le mot important dans cette définition est le mot « **unique** »
2. La proposition précédente veut dire que si une famille est liée, un même élément de $\mathrm{Vect}\left(\{u_1, \dots, u_n\}\right)$ peut s'écrire de plusieurs façons

   Exemple :
   Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les 3 vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ et $e_3 = (0, 1)$. Le vecteur $X = (1, 2)$ qui est un vecteur de $\mathrm{Vect}\left(\{e_1, e_2, e_3\}\right)$ s'écrit : $X = e_1 + e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_3$
   Il n'y a pas d'unicité de la décomposition de X suivant e_1, e_2, e_3