6.5 Base et dimension d'un espace vectoriel

6.5.1 Définition

On dit qu'une famille B de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, c'est à dire si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B.

Remarque 9 :

1. **Qu'est ce que cela veut dire ?**
   Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, ceci veut dire que :
   (a) Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, c'est à dire vect $(\{u_1, \ldots, u_n\}) = E$
   (c'est un système générateur)
   (b) Ces scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniques*(c'est un système libre)*. L'unicité vient de la proposition 6.4.5
2. Cette notion est très importante puisqu'elle permet de calculer commodément dans les $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Il faut cependant en montrer l'existence.
3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n)\}$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique : $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ avec $x_i \in \mathbb{R}$
   Ces réels $x_1, \ldots, x_n$sont appelés **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.**
   Ces coordonnées sont uniques : on dit qu'**il y a unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.**

6.5.2 Théorème : existence d'une base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base B de E.

Démonstration

D'après la définition 6.4.2, E étant de dimension finie, il existe une famille génératrice finie de E.

1. Si cette famille génératrice est vide alors $E = \{\overrightarrow{0}\}$ et $B = \emptyset$
2. Supposons cette famille non vide et notons la $\{u_1, .., u_n\}$ et considérons toutes les sous-familles de cette famille. Certaines engendrent E et d'autres pas.
   On en choisit une qui engendre E et ait le plus petit nombre p d'éléments possible : $p \leqslant n$
   Démontrons par l'absurde que cette famille B, que l'on suppose formée des vecteurs $\{u_1, .., u_p\}$ est libre.
   En effet, si elle n'est pas libre, il y a un de ses éléments, disons u_1 par exemple, qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres et on a alors :
   $$\text{Vect}\left(\{u_1, .., u_p\}\right) = \text{Vect}\left(\{u_2, .., u_p\}\right)$$
   Par conséquent la famille $\{u_2, .., u_p\}$ engendre E et comporte $p - 1$ éléments ce qui contredit la définition de p.
   Nous avons donc trouvé une famille libre et génératrice de E, donc une base de E.

Exemple 9 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère ; $\mathcal{B}_0 = \{(1,0)\ \ (0,1)\}$; c'est une base de $\mathbb{R}^2$. **Mais, ce n'est pas la seule !**.
   Il y a plusieurs bases dans un espace vectoriel
   Démontrons que $\mathcal{B}_1 = \{(1,1)\ \ (-1,1)\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

- C'est une famille libre.
  En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,1) + \mu(-1,1) = (0,0)$
  Alors, nous avons $(\lambda - \mu, \lambda + \mu) = (0,0)$, ce qui nous donne le système :
  $$\begin{cases} \lambda - \mu = & 0 \\ \lambda + \mu = & 0 \end{cases}$$
  D'où on tire $\lambda = \mu = 0$
- C'est une famille génératrice
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il faut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(-1,1)$, ce qui nous donne le système :
  $$\begin{cases} \lambda - \mu = & x \\ \lambda + \mu = & y \end{cases}$$
  D'où on tire $\lambda = \dfrac{x+y}{2}$ et $\mu = \dfrac{y-x}{2}$; c'est donc bien une famille génératrice

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1)\ (-1,1)\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère ; $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)\}$; c'est une base de $\mathbb{R}^3$; on l'appelle **la base canonique**
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, si on considère $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$, $\mathcal{B}_0 = \{e_0\ e_1\ e_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$; c'est ausssi la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

6.5.3 Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors,
Toute famille libre $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ de vecteurs de E, peut être complétée en une base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n\}$ de E.

Démonstration

Il y a deux possibilités au départ : la famille $\mathcal{C}$ peut être génératrice de E, ou bien elle peut ne pas l'être.

1. Si la famille $\mathcal{C}$ engendre E, il suffit de poser $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et nous ne complétons pas la famille $\mathcal{C}$, car la famille $\mathcal{C}$ étant libre et génératrice est une base
2. Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ n'engendre pas E
   E étant de dimension finie, il existe une famille finie $\mathcal{G} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ qui engendre E *(le problème, c'est qu'à priori elle n'est pas libre).*
   Nous allons construire une suite de familles libres $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q$, par récurrence, de façon à ce que, au final, $\mathcal{C}_q$ soit une base de E.
   (a) Nous prenons au départ $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$, et on construit $\mathcal{C}_1$ de la façon suivante :
   Nous examinons le vecteur v_1, le premier vecteur issu de la famille génératrice $\mathcal{G}$.
      i. Si $v_1 \in \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_0)$, on pose $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0$.*(Mais on n'a pas avancé)*
      ii. Si $v_1 \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_0)$, on pose $u_{p+1} = v_1$ et on construit alors $\mathcal{C}_1$ en adjoignant à $\mathcal{C}_0$ le vecteur v_1
      Donc, $\mathcal{C}_1 = \{u_1, \ldots, u_p, v_1\} = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\} = \mathcal{C}_0 \cup \{u_{p+1}\}$.
      iii. Dans le deuxième cas on voit que la famille $\mathcal{C}_1$ est libre
      En effet, s'il existe des réels r_i tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} r_i u_i = 0$, nous avons en premier lieu $r_{p+1} = 0$, car, sinon, cela signifierait que $u_{p+1} = v_1$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{u_1, \ldots, u_p\}$, ce qui est impossible car $u_{p+1} = v_1 \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_0)$
      Donc, $r_{p+1} = 0$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} r_i u_i = 0$, ce qui montre que $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 0$, car la famille $\mathcal{C}_0$ est une famille libre.

   Ainsi, la famille $\mathcal{C}_1$ est une famille libre

(b) Et on continue ainsi de suite. Nous aurons au plus q itérations, de telle sorte que $\mathcal{C}_q$ forme une base de E beginenumerate

(c) La famille $\mathcal{C}_q$ est libre par construction.

(d) De plus, la famille $\mathcal{C}_q$ engendre E, car, par construction de $\mathcal{C}_q$, $\text{vect}(\{v_1, \ldots, v_q\}) \subset \text{vect}(C_q)$. Comme $E = \text{vect}(\{v_1, \ldots, v_q\})$, C_q est une base de E.

6.5.4 Lemme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Soient $x_1, \ldots, x_p$, p vecteurs de E et $y_1, \ldots, y_{p+1}$ des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_p$, alors les $y_1, \ldots, y_{p+1}$ sont linéairement dépendants

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur p

1. Elle est vraie pour $p = 1$
   En effet, si $y_1 = \lambda_1 x_1$ et si $y_2 = \lambda_2 x_1$, alors, $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0$, ce qui montre que les deux vecteurs y_1 et y_2 sont linéairement dépendants.
2. Supposons la propriété vraie au rang p
3. Démontrons la propriété au rang $p + 1$
   Soient $x_1, \ldots, x_{p+1}$ et $y_1, \ldots, y_{p+2}$ des familles de vecteurs tels que les vecteurs de la famille $y_1, \ldots, y_{p+2}$ soient combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_{p+1}$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} y_1 = & a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p+1}x_{p+1} \\ y_2 = & a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \vdots & \vdots\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_{p+2} = & a_{p+2,1}x_1 + \ldots + a_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}\right.$$

Où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Si tous les $a_{i,j}$ sont nuls, alors les $y_1 = \ldots = y_{p+2} = \overrightarrow{0}$ et la famille $y_1, \ldots, y_{p+2}$ est bien liée.

Sinon, supposons qu'il existe un $a_{i,j}$ non nul, et supposons, pour simplifier, que $a_{1,1} \neq 0$, alors, en écrivant

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}}y_1 - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}x_1 - \ldots - \frac{a_{1,p+1}}{a_{1,1}}x_{p+1}$$

x_1 s'écrit comme combinaison linéaire de $y_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$

De la même manière,en recombinant dans le système, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rl} y_2 = & \beta_2 y_1 + \gamma_{2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{2,p+1}x_{p+1} \\ y_3 = & \beta_3 y_1 + \gamma_{3,2}x_2 + \ldots + \gamma_{3,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{p+2} = & \beta_{p+2}y_1 + \gamma_{p+2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}$$

Ce système étant équivalent à

$$\begin{array}{rl} y_2 - \beta_2 y_1 = & \gamma_{2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{2,p+1}x_{p+1} \\ y_3 - \beta_3 y_1 = & \gamma_{3,2}x_2 + \ldots + \gamma_{3,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{p+2} - \beta_{p+2}y_1 = & \gamma_{p+2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}$$

Nous avons donc $p + 1$ vecteurs $y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_2 y_1, \ldots, y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1$ qui sont des combinaisons linéaires des p vecteurs $x_2, \ldots, x_{p+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les $p + 1$ vecteurs $y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_2 y_1, \ldots, y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1$ sont linéairement dépendants, ce qui se traduit par :

$$\lambda_1 (y_2 - \beta_2 y_1) + \lambda_2 (y_3 - \beta_2 y_1) + \ldots + \lambda_{p+1} (y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1) = \overrightarrow{0}$$

Où les λ_i ne sont pas tous nuls ; ceci donne, une fois cette expression réorganisée,

$$\lambda'_1 y_2 + \lambda'_2 y_3 + \ldots + \lambda'_{p+1} y_{p+2} + \lambda'_{p+2} y_1 = \overrightarrow{0}$$

Où les λ'_i ne sont pas tous nuls. Ainsi, les $y_1, \ldots, y_{p+2}$ sont linéairement dépendants.

6.5.5 Théorème et définition

1. **Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E. Soit $m > n$.**
   Alors, toute famille de m vecteurs de E est liée.
2. **Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments appelé <u>dimension</u> du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et noté $\dim E$**

Démonstration

1. <u>Si $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ est une base de E, alors, pour $m > n$, toute famille de m vecteurs de E est liée.</u>
   Nous allons utiliser le lemme 6.5.4
   Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n\}$ une base de E, et $f_1, \ldots, f_m$, m vecteurs de E, où $m > n$.
   Les f_i où $i = 1 \ldots, m$ sont tous combinaison linéaire des $\{e_1, \ldots e_n\}$, et d'après le lemme précédent 6.5.4, sont tous linéairement dépendants.
2. Supposons deux bases de E, $\mathcal{B}_0 = \{e_1, .., e_n\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{f_1, .., f_m\}$, avec $m > n$.
   Chacune des f_i est combinaison linéaire des $\{e_1, .., e_n\}$, et la famille $\{f_1, .., f_m\}$ est donc liée, ce qui est en contradiction avec le point de départ qui est que $\mathcal{B}_1$ est une base ; donc, $m \leqslant n$; de la même manière, on montre que $n \leqslant m$, et donc $m = n$

6.5.6 Proposition

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n :

1. **Toute famille libre $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de n vecteurs de E est une base.**
2. **Toute famille génératrice $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de n vecteurs de E est une base.**

Démonstration

1. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E libre
   D'après le théorème de la base incomplète 6.5.3, la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ peut être complétée en une base $\{u_1, \ldots, u_n \ldots u_{n+m}\}$ de E .
   Or toutes les bases de E ont exactement n éléments.
   Donc $m = 0$, c'est à dire $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E.
2. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E génératrice.
   La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ contient, d'après 6.5.2, une base de E.
   Comme toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments, c'est que cette base est $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque 10 :

Cette proposition nous permet d'écrire que la dimension n d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est **le nombre minimum de vecteurs générateurs, et le nombre maximum de vecteurs libres.**

Exercice 7 :

1. **Montrer que les 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base quels que soient les réels a,b et c.**

   Pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer que ces 3 vecteurs forment un système libre.
   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\lambda\,(1, a, b) + \mu\,(0, 1, c) + \gamma\,(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

   Cette équation se réduit à :

   $$(\lambda, a\lambda + \mu, b\lambda + c\mu + \gamma) = (0, 0, 0)$$

   Qui donne le système :

   $$\begin{cases} \lambda = & 0 \\ a\lambda + \mu = & 0 \\ b\lambda + c\mu + \gamma & = 0 \end{cases}$$

   D'où on tire $\lambda = \mu = \gamma = 0$. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont bien linéairement indépendants, dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

2. **Quelles sont les coordonnées du triplet $(1, 3, 5)$ dans cette base ?**

   Les coordonnées sont des nombres réels x, y et z tels que :

   $$x\,(1, a, b) + y\,(0, 1, c) + z\,(0, 0, 1) = (1, 3, 5)$$

   Nous obtenons donc le système : Qui donne le système :

   $$\begin{cases} x = & 1 \\ ax + y = & 3 \\ bx + cy + z & = 0 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x = 1$, $y = 3 - a$ et $z = -b - c\,(3 - a) = ac - 3c - b$

3. **Quel est le triplet qui a pour coordonnées $(1, 3, 5)$ dans cette base**

   Le triplet qui pour coordonnées $(1, 3, 5)$ s'écrit :

   $$1\,(1, a, b) + 3\,(0, 1, c) + 5\,(0, 0, 1)$$

   C'est donc le triplet : $(1, a + 3, b + 3c + 5)$

6.5.7 Proposition

1. **Un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n est de dimension finie.**
2. **Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a alors $\dim F \leqslant \dim E$.**
3. **Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.**

Démonstration

On appelle $n = \dim E$ et soit F un sous-espace vectoriel de E

1. Toute famille libre finie de F est aussi une famille libre et finie de E et peut donc, par le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E.
   Elle a donc au plus n éléments d'après la proposition précédente.
   Choisissons parmi les familles finies libres de F une famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ ayant le nombre maximal d'éléments possible. On a $p \leqslant n$.

Montrons que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ **est une base de** F**, et pour ce faire, on montre que** $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\} = F$

Si $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\} \neq F$, il existe un vecteur $u \in F$ n'appartenant pas à $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\}$.

Alors $\{u_1, \ldots, u_p, u\}$ est une famille libre de $p+1$ vecteurs de F : contradiction avec le fait que p est le nombre maximal de vecteurs libres dans F.

Donc $\{u_1, \ldots, u_p\}$ engendre F, et donc c'est une base de F et F est de dimension finie.

2. La proposition $\dim F \leqslant \dim E$ résulte directement de $\dim(F) = p$ et $p \leqslant n$.
3. Si $p = n$ et si F est strictement contenu dans E, il existe un vecteur $u \in E$ et non dans F et $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ est une famille libre de E ; donc $\dim(E) \geqslant n+1$: impossible.
   Donc, $F = E$

6.5.8 Proposition : dimension de la somme

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espace vectoriel de E. Nous avons :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

On considère donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espace vectoriels de E. On sait que d'après la proposition précédente que F, G et $F \cap G$ sont de dimension finie.

1. Soit $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de $F \cap G$.
   On peut alors la compléter, d'une part en une base $\mathcal{C} = \{u_1, .., u_k, v_1, .., v_s\}$ de F, et d'autre part en une base $\mathcal{D} = \{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t\}$ de G.
2. Montrons que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une base de $F+G$.
   Comme un vecteur de $F+G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G , il est évident que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une famille génératrice de $F+G$
3. Il reste à montrer que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une famille libre
   On suppose :

$$r_1u_1 + \ldots + r_ku_k + r_{k+1}v_1 + \ldots + r_{k+s}v_s + r_{k+s+1}w_1 + \ldots + r_{k+s+t}w_t = \overrightarrow{0}$$

Il faut remarquer que si

$$\overrightarrow{f} = r_1u_1 + \ldots + r_ku_k + r_{k+1}v_1 + \ldots + r_{k+s}v_s$$

et si

$$\overrightarrow{g} = r_{k+s+1}w_1 + \ldots + r_{k+s+t}w_t$$

Nous avons $\overrightarrow{f} \in F$, $\overrightarrow{g} \in G$ et $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{g}$

Ces deux vecteurs sont donc dans $F \cap G$,ce qui implique $r_{k+1} = \ldots = r_{k+s} = r_{k+s+1} = \ldots = r_{k+s+t} = 0$ car les vecteurs v_i et w_i ne sont pas dans $F \cap G$

Puis, comme la famille $u_1, \ldots, u_k$ est libre on a : $r_1 = \ldots = r_k = 0$.

Donc $\dim(F+G) = k + r + s$ avec $\dim(F) = k+s$, $\dim(G) = k+t$ et $\dim(F \cap G) = k$

D'où le résultat.

6.5.9 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie .
Un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.