6.6 Quelques exercices complémentaires

6.6.1 Savoir calculer dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 8 :

1. Etant donnés les couples $A = (-2, 3)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-7, -4)$, déterminer le couple $X \in \mathbb{R}^2$ défini par

   (a) $X = 5A + B$ (b) $3X + 2A - B = 0$ (c) $7X + C - 2B = 0$

2. Etant donnés les couples $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, déterminer les couples X et Y définis par

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ X - Y + A - 2B = & 0 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice

Exercice 9 :

1. A et B étant des éléments de $\mathbb{R}^2$, dans chacun des cas suivants, montrer que l'implication suivante est vraie :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ (\alpha A + \beta B = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$$

   (a) $A = (1, 2)$ et $B = (3, 4)$
   (b) $A = (0, 2)$ et $B = (3, 0)$
   (c) $A = (1, -1)$ et $B = (3, 3)$
   (d) $A = (1, -1)$ et $B = (-2, 3)$

2. Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe des réels non nuls α et β tels que

$$\alpha A + \beta B = 0$$

   (a) $A = (1, 2)$ et $B = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$
   (b) $A = (0, 2)$ et $B = (0, 0)$
   (c) $A = (2, 0)$ et $B = (3, 0)$
   (d) $A = (1, -1)$ et $B = (-3, 3)$
   (e) $A = \left(\sqrt{2}, 2\right)$ et $B = \left(1, \sqrt{2}\right)$

Corrigé de l'exercice

6.6.2 Espaces vectoriels, sous espaces vectoriels

Exercice 10 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y = 0\right\} \\
A_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \geq 0\right\} \\
A_3 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } xy = x^2\right\} \\
A_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 0\right\} \\
A_5 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\
A_6 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = a + bety = a - b, \text{ avec } a \in \mathbb{R}etb \in \mathbb{R}\right\} \\
A_7 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 2\right\} \\
A_8 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\right\} \\
A_9 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 2\right\} \\
A_{10} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xyz = 0\right\} \\
A_{11} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + 2z = 0 \text{ et } x - y - 5z = 0\right\} \\
A_{12} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x| = |y|\right\} \\
A_{13} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } yz = 5\right\} \\
A_{14} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = a, y = 2a, z = 3a, a \in \mathbb{R}\right\} \\
A_{15} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = a - b + c, y = a + b - c, z = 2a + 3b \text{ avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Exercice 11 :

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Rappeler la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}$
2. Soit $N = \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(0) = 0\}$ Est ce que N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?
3. Même question pour $N^1 = \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(0) = 1\}$

Exercice 12 :

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$, lesquels forment des sous espaces vectoriels ?

1. $F_2 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ est impaire }\}$
2. $F_3 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) - 3\}$
3. $F_4 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0\}$
4. $F_5 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ bornée }\}$

Exercice 13 :

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit $P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Est ce que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 14 :

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lesquels forment des sous espaces vectoriels ?

1. $G_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{tel que deg} P = 7\}$
2. $G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{tel que deg} P \leq 3\}$
3. $G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{tel que deg} P \text{est pair}\}$
4. $G_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{tel que } P \text{n'a pas de terme constant}\}$
5. $G_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{tel que } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$

Exercice 15 :

Corrigé de l'exercice
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $1 \leq \deg A \leq n$
Montrer que l'ensemble E des polynômes de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui s'écrivent $P(X) = Q(X) A(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

6.6.3 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré

Exercice 16 :

Corrigé de l'exercice
Dans $\mathbb{R}^3$ soit la famille $u = (1, 4, -3), v = (2, 5, 3), w = (3, 0, 27)$. Avons nous

1. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$
2. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, w)$
3. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w)$

Exercice 17 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (-2, 3, 7)$, $v = (1, -2, -3)$ et $w = (-1, 1, 6)$.
Montrer que $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u, w)$.

Exercice 18 :

Corrigé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1, 0, 1, 1)$, $b = (-1, -2, 3, -1)$, $c = (-5, -3, 1, -5)$, $d = (-1, -1, 1, -1)$ et $e = (4, 1, 2, 4)$. Montrer que $\text{Vect}\,(a, b, c) = \text{Vect}\,(d, e)$.

Exercice 19 :

1. Soient dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $f_l(x) = e^x$, $f_2(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f_4(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $f_4(x) = e^{-x}$. Donnez une représentation plus simple de $\text{Vect}\,(f_l, f_2, f_3, f_4)$.
   Corrigé de l'exercice
2. Même question que précédemment, cette fois ci dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ avec les polynômes $P_l(x) = 1 - x$, $P_2(x) = 1 - x^2$, $P_3(x) = x^2 - x$.
3. Même question avec les fonctions : $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$, et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$

6.6.4 Familles libres, familles génératrices

Exercice 20 :

Corrigé de l'exercice

1. Les triplets $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$; sont-ils libres dans $\mathbb{R}^3$?
2. Même question à propos de $(1, 2, 3)$,$(4, 5, 6)$ et $(7, 8, 9)$ dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 21 :

Corrigé de l'exercice

1. Montrer que $x = (2, 3, -1)$ et $y = (1, 1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que $u = (3, 7, 6)$ et $v = (5, 0, -25)$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 5)$, $v_3 = (3, 1, a)$, $v_4 = (2, 1, b)$. Trouver a et b pour que (v_1, v_2) engendrent le même espace que (v_3, v_4)

Exercice 22 :

Corrigé de l'exercice

1. On considère $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $r \neq s$, alors les fonctions $f_r(x) = e^{rx}$ et $f_s(x) = e^{sx}$ sont linéairement indépendantes, et quel est l'ensemble engendré par les fonctions f_r et f_s
2. Même question avec $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$

6.6.5 Bases d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel

Exercice 23 :

Dans $\mathbb{R}^2$, parmi les paires d'éléments suivants, lesquels sont linéairement indépendants ? Quel est le sous-espace vectoriel $\text{Vect}\,(u, v)$ engendré, est-il possible d'écrire $\overrightarrow{w}\,(2, -4)$ comme combinaison linéaire de u et v ?

1. $u = (0, 2)$, $v = (3, 0)$
2. $u = (-1, 2)$, $v = (0, 0)$
3. $u = (1, -1)$, $v = (2, 2)$

Exercice 24 :

Corrigé de l'exercice

1. Cet exercice se place dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   Pour $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a', b') \in \mathbb{R}^2$, nous définissons le déterminant $\det(u, v)$ de ces deux vecteurs par :
   $$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$
   (a) Démontrez que $\det(u, v) = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires
   (b) Démontrez que $\det(u, v) = -\det(v, u)$
   (c) Démontrez que $\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w)$
   (d) Démontrez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v)$
   (e) Démontrez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(u, \lambda v) = \lambda \det(u, v)$
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la famille $\{(m, 4), (1, m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$
3. (a) Vérifier que la famille $\{(1, 4), (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   (b) Quel est le couple qui a pour coordonnées $(-1, 2)$ dans la base $\{(1, 4), (1, 1)\}$
   (c) Quelles sont les coordonnées du couple $(1, 5)$ dans cette base ?

Exercice 25 :

Corrigé de l'exercice Démontrer que $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 1 - 4)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Trouver un triplet w, qui avec les deux précédents forme une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 26 :

Corrigé de l'exercice
On considère le sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ défini par $F = \left\{(a + 2b, 2a - b, 3b) ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base

Exercice 27 :

1. Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $u = (3, 1)$ et $v = (-1, 5)$.
2. Le vecteur $w = (1, 0)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$?
3. Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u et v.

Exercice 28 :

Corrigé de l'exercice

1. Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $u = (-1, 1, -3)$, $v = (1, 2, 5)$, $w = (1, 7, 1)$.
2. Le vecteur $a = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v, w)$? Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u,v et w
3. Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 2, 1)$, $c = (3, 3, 3)$ et $d = (7, 0, -7)$
4. Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 1, 1, 2)$, $b = (2, 1, 0, 3)$, $c = (-1, 0, -1, 4)$ et $d = (-9, -2, 1, -1)$

Exercice 29 :

Corrigé de l'exercice

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et$d = (5, 0, -7)$. Montrer que $\text{Vect}(\{a, b\}) = \text{Vect}(\{c, d\})$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1, 0, 1, 1)$, $b = (-1, -2, 3, -1)$, $c = (-5, -3, 1, -5)$, $d = (-1, -1, 1, -1)$ et $e = (4, 1, 2, 4)$. Montrer que $\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(d, e)$.

Exercice 30 :

Soient $u = (1, -1, 2)$, $v = (2, 1, 4)$ et $w = (3, 3, 6)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Ces vecteurs sont-ils linéairement dépendants ou indépendants ?
2. Sont-ils 2 à 2 colinéaires ?

Exercice 31 :

Corrigé de l'exercice
Construire une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant

1. $x = z - y$
2. $x + y + z = -x + 3y + 2z = 0$
3. $z = 0$

6.6.6 Miscelleanous

Exercice 32 :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$5f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 33 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

1. $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre réel, on considère les vecteurs :

$$\begin{cases} I = & (m-3)\, i + mj \\ J = & (m+1)\, i - j \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs de m la famille $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est-elle libre ou liée ?
2. On suppose $m = 2$. Montrer que $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est une base de V.
   Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de V de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$ et de coordonnées (X, Y) dans la base $\mathcal{F} = \{I, J\}$. Calculer x et y en fonction de X et Y

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ indexés par le paramètre $m \in \mathbb{R}$ P_m et Q_m :

$$P_m(X) = (m - 14)\, X^2 + (m - 5)\, X + 3 \qquad Q_m(X) = 5X^2 - 2mX + m$$

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\text{vect}(\{P_m; Q_m\})$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-il de dimension 2, de dimnsion 1 ?

Exercice 35 :

Voici 2 questions semblables. Seule une sera corrigée.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   (a) Démontrer que, pour tout vecteur $u \in V$, $v \in V$ et $w \in V$, nous avons l'équivalence :

$$\{u, v, w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{u, u + v, u + v + w\} \text{ libre}$$

   (b) Soit $A \in V$, le vecteur de coordonnées $(1, 3, 5)$ dans la base $\{u, v, w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{u, u + v, u + v + w\}$

2. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   (a) Démontrer que, pour tout vecteur $u \in V$, $v \in V$ et $w \in V$, nous avons l'équivalence :
   $$\{u, v, w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{v + w, u + w, u + v\} \text{ libre}$$
   (b) Soit $A \in V$, le vecteur de coordonnées $(1, -2, 5)$ dans la base $\{u, v, w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{v + w, u + w, u + v\}$

Exercice 36 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$

1. On considère les vecteurs :
   $$\begin{cases} I = & i - j + 2k \\ J = & 2i + j - k \\ K = & 3i - j + 4k \end{cases}$$
   Montrer que la famille $\{I, J, K\}$ est une base de V
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = i + j + k$ dans la base $\{I, J, K\}$

Exercice 37 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$F(X) = X + 1 \quad G(X) = X^2 + X - 1 \quad H(X) = X^2 - 2 \quad I(X) = X - 1$$

1. Montrer que la famille $\{F, G, H\}$ est une famille liée. Quel est le sous-espace vectoriel $\text{vect}(\{F, G, H\})$ engendré par la famille $\{F, G, H\}$
2. Montrer que la famille $\{G, H, I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2 + X - 3$ dans cette base

Exercice 38 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel E des vecteurs de la forme $E = \left\{(x, y, z)_i n\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = 0\right\}$ et le sous-espace vectoriel F défini par : $\text{vect}(\{(1, 2, 3); (1, 3, 4)\})$

1. Déterminer $E \cap F$
2. Déterminer $E + F$

Exercice 39 :

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère E l'ensemble des triplets de la forme $(a - b, a, a + b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ainsi que l'ensemble F des triplets (x, y, z) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ et tels que $x = y = z$

1. Montrer que E et F sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$; en donner une base pour chacun d'eux
2. Déterminer $E \cap F$ et $E + F$

Exercice 40 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les ensembles suivants :

- $E = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(X) = aX^2 + bX\right\}$
- $F = \left\{Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } Q(X) = \lambda X^2 + \mu X + \lambda\right\}$

1. Montrer que E et F sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$; en donner une base pour chacun d'eux
2. Déterminer $E \cap F$ et $E + F$

Exercice 41 :

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire réel.

1. Démontrer qu'une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Cette base est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est symétrique si $A = A^T$ et antisymétrique si $-A = A^T$ où A^T est la matrice transposée.
   Montrer que, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   (a) Une matrice symétrique est du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$
   (b) Une matrice antisymétrique est du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$
3. On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques. Démontrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
4. On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
5. Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
6. A l'aide d'une base de $\mathcal{A}$ et d'une base de $\mathcal{S}$, donner une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$