6.7 Quelques exercices corrigés

Comme souvent, tous les exercices présentés dans le cours ne sont pas corrigés

6.7.1 Savoir calculer dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 :

Etant donnés les couples $A = (-2, 3, 7)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (-7, -4, 5)$, déterminer le triplet X défini par

Voilà un exercice simple ; ce n'est que du calcul !

1. $X = 5A + B$

$$X = 5\,(-2, 3, 7) + (-2, -1, 0) = (-10, 15, 35) + (-2, -1, 0) = (-12, 14, 35)$$

   Donc, $X = (-12, 14, 35)$

2. $3X + 2A - B = 0$

$$\begin{aligned} 3X + 2A - B = 0 \iff & \ 3X = B - 2A \\ \iff & \ X = -\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B \\ \iff & \ X = \frac{1}{3}\,(-2, -1, 0) - \frac{2}{3}\,(-2, 3, 7) \\ \iff & \ X = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right) \\ \iff & \ X = \frac{1}{3}\,(1, -7, -14) \end{aligned}$$

   Donc, $X = \frac{1}{3}\,(1, -7, -14)$

3. $7X + C - 2B = 0$

Exercice 8 :

Enoncé de l'exercice

Etant donnés les couples $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, déterminer les couples X et Y définis par

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ X - Y + A - 2B = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas grande difficulté à résoudre ce système *(parce que c'en est un !)*
En multipliant par -1 la seconde équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ -X + Y - A + 2B = & 0 \end{cases}$$

Et en additionnant : $5Y + A + 3B = 0 \iff Y = -\frac{1}{5}A - \frac{3}{5}B = -\frac{1}{5}\,(A + 3B) = -\frac{1}{5}\,(7, 11)$

Donc, $\boxed{Y = \left(\frac{-1}{5}, \frac{11}{5}\right)}$

De même, En multipliant par 4 la seconde équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ 4X - 4Y + 4A - 8B = & 0 \end{cases}$$

Et en additionnant : $5X + 6A - 5B = 0 \iff X = -\frac{6}{5}A + B = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Donc, $\boxed{X = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$

Exercice 9 :

Enoncé de l'exercice

Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe des réels non nuls α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$

1. $A = (0, 2)$ **et** $B = (0, 0)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha (0, 2) + \beta (0, 0) = (0, 2\alpha)$
   Ainsi, en posant $\alpha = 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, nous avons répondu à la question
2. $A = (1, -1)$ **et** $B = (-3, 3)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha (1, -1) + \beta (-3, 3) = (\alpha - 3\beta, -\alpha + 3\beta)$
   α et β vérifient donc l'équation $\alpha - 3\beta = 0$
   Ainsi, en posant $\alpha = 3\beta$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, on montre qu'il existe une infinité de couples (α, β) tels que $\alpha A + \beta B = 0$
3. $A = \left(\sqrt{2}, 2\right)$ **et** $B = \left(1, \sqrt{2}\right)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha \left(\sqrt{2}, 2\right) + \beta \left(1, \sqrt{2}\right) = \left(\alpha\sqrt{2} + 2\beta, \alpha + \beta\sqrt{2}\right)$
   α et β vérifient donc le système d'équations $\begin{cases} \alpha\sqrt{2} + 2\beta = & 0 \\ \alpha + \beta\sqrt{2} = & 0 \end{cases}$
   On peut remarquer que, dans le système, en multipliant la seconde équation par $\sqrt{2}$, nous obtenons la première équation. Le système se réduit donc à une seule équation : $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$
   Ainsi, en posant $\alpha = -\beta\sqrt{2}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, on montre qu'il existe une infinité de couples (α, β) tels que $\alpha A + \beta B = 0$

6.7.2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 15 :

Enoncé de l'exercice

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $1 \leq \deg A \leq n$

Montrer que l'ensemble E des polynômes de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui s'écrivent $P(X) = Q(X)A(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

Comme toujours, il y a deux étapes à cette démonstration :

1. On montre que $E \neq \emptyset$
   Le polynôme nul $\mathcal{O}$ est bien un élément de E ; en effet, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}(X) = A(X) \times \mathcal{O}(X)$ où $A \in \mathbb{R}_n[X]$
2. On montre que E est stable par combinaison linéaire
   Soit $P \in E$, $R \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, nous allons montrer que $\lambda P + \mu R \in E$
   — Comme $P \in E$, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = Q(X)A(X)$
   — De même, comme $R \in E$, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $R(X) = Q_1(X)A(X)$
   — Alors,
   $$\begin{aligned}(\lambda P + \mu R)(X) = & \ (\lambda P)(X) + (\mu R)(X) \\ = & \ \lambda P(X) + \mu R(X) \\ = & \ \lambda Q(X)A(X) + \mu Q_1(X)A(X) \\ = & \ A(X)(\lambda Q(X) + \mu Q_1(X))\end{aligned}$$
   En posant $Q_2(X) = \lambda Q(X) + \mu Q_1(X)$, nous avons $(\lambda P + \mu R)(X) = Q_2(X)A(X)$
   Ce qui montre que $\lambda P + \mu R \in E$

On vient donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

6.7.3 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré

Exercice 16 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *soit la famille* $u = (1, 4, -3)\,, v = (2, 5, 3)\,, w = (3, 0, 27)$. *Avons nous :*

1. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, v)$
2. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, w)$
3. $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(v, w)$

Il faut donc se poser la question : Avons nous w combinaison linéaire de u et v ? Il faut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $w = au + bv$. Nous avons :

$$w = au + bv \iff \begin{cases} a + 2b = & 3 \\ 4a + 5b = & 0 \\ -3a + 3b = & 27 \end{cases}$$

En résolvant le premier système $\begin{cases} a + 2b = & 3 \\ 4a + 5b = & 0 \\ -3a + 3b = & 27 \end{cases}$, on trouve $a = -5$ et $b = +4$ qui vérifie aussi l'équation $-3a + 3b = 27$

Ce qui veut dire que $w = -5u + 4v \iff u = \frac{-1}{5}w + \frac{4}{5}v \iff v = \frac{1}{4}w + \frac{5}{4}u$

Nous avons donc bien $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, v) = \text{Vect}\,(u, w) = \text{Vect}\,(v, w)$

Exercice 18 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ *, on pose* $a = (1, 0, 1, 1)$*,* $b = (-1, -2, 3, -1)$*,* $c = (-5, -3, 1, -5)$*,* $d = (-1, -1, 1, -1)$ *et* $e = (4, 1, 2, 4)$*. Montrer que* $\text{Vect}\,(a, b, c) = \text{Vect}\,(d, e)$.

Il suffit de montrer que a, b et c sont combinaisons linéaire de d ete.

1. Montrons que a est combinaison linéaire de d et e

   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $a = xd + ye$

   $$a = xd + ye \iff \begin{cases} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & 0 \\ x + 2y = & 1 \\ -x + 4y = & 1 \end{cases}$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

   $$\begin{cases} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & 0 \end{cases} \iff x = y = \frac{1}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $a = \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}e$

2. Montrons que b est combinaison linéaire de d et e

   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $b = xd + ye$

   $$b = xd + ye \iff \begin{cases} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & -2 \\ x + 2y = & 3 \\ -x + 4y = & -1 \end{cases}$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

   $$\begin{cases} x + 4y = & -1 \\ -x + y = & -2 \end{cases} \iff x = \frac{7}{3} \text{ et } y = \frac{1}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $b = \frac{7}{3}d + \frac{1}{3}e$

3. Montrons que c est combinaison linéaire de d et e
   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $c = xd + ye$

$$c = xd + ye \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = & -5 \\ -x + y = & -3 \\ x + 2y = & 1 \\ -x + 4y = & -5 \end{cases}$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

$$\begin{cases} -x + 4y = & -5 \\ -x + y = & -3 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ et } y = \frac{-2}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $c = \frac{7}{3}d + \frac{-2}{3}e$

Nous avons donc bien $\text{Vect}\,(a, b, c) = \text{Vect}\,(d, e)$

Exercice 19 :

Enoncé de l'exercice

1. *Donnez une représentation plus simple de* $\text{Vect}\,(P_l, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}\,[X]$ *avec les polynômes* $P_l\,(x) = 1 - x$, $P_2\,(x) = 1 - x^2$, $P_3\,(x) = x^2 - x$.

   Il suffit de remarquer que $P_3 = P_1 - P_2$, et donc $\text{Vect}\,(P_l, P_2, P_3) = \text{Vect}\,(P_l, P_2)$

2. *Même question avec les fonctions :* $f\,(x) = \cos\,(x)$, $g(x) = \cos\,(x)\cos\,(2x)$, *et* $h\,(x) = \sin\,(x)\sin\,(2x)$

   Il faut utiliser les formules trigonométriques :

   — $\cos\,(2x) = 2\cos^2\,(x) - 1$

   — $\sin\,(2x) = 2\sin x \cos x$

   Donc, $g(x) = \cos\,(x)\cos\,(2x) = \cos\,(x)\left(2\cos^2\,(x) - 1\right) = 2\cos^3\,(x) - \cos x$
   Et,

$$\begin{aligned} h\,(x) = & \sin\,(x)\sin\,(2x) \\ = & \sin\,(x)\,(2\sin x\cos x) \\ = & 2\sin^2 x\cos x \\ = & 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x \\ = & 2\cos x - 2\cos^3 x \end{aligned}$$

   On voit tout de suite que $h = f - g$, et donc $\text{Vect}\,(f, g, h) = \text{Vect}\,(f, g)$

6.7.4 Familles libres, familles génératrices

Exercice 20 :

Enoncé de l'exercice

1. *Les triplets* $(1, 0, 1)$ *et* $(1, 1, 1)$ *engendrent-ils* $\mathbb{R}^3$ *; sont-ils libres dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

   Comme $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$, car il n'y a que deux vecteurs.
   Par contre, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ est, peut-être libre. Pour le voir, remarquons que les coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ est bien une famille libre

2. *Même question à propos de* $(1, 2, 3)$,$(4, 5, 6)$ *et* $(7, 8, 9)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

   La famille $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ ne peut pas être libre, puisque

$$(4, 5, 6) = \frac{(1, 2, 3) + (7, 8, 9)}{2}$$

Exercice 21 :

Enoncé de l'exercice

1. *Montrer que* $x = (2, 3, -1)$ *et* $y = (1, 1, -2)$ *engendrent le même sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *que* $u = (3, 7, 6)$ *et* $v = (5, 0, -25)$

   En fait, il suffit de montrer que u et v sont combinaisons linéaires de x et de y, et donc de trouver $a \in \mathbb{R}$, $a' \in \mathbb{R}$,$b \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$ tels que $u = ax + by$ et $v = a'x + b'y$

   — Trouvons donc a et b tels que $(3, 7, 6) = a(2, 3, -1) + b(1, 1, -2)$. Nous avons alors le système :

   $$\begin{cases} 2a + b = & 3 \\ 3a + b = & 7 \\ -a - 2b = & 6 \end{cases} \Longleftrightarrow a = 4 \quad b = -5$$

   Donc $u = 4x - 5y$

   — Trouvons donc a' et b' tels que $(5, 0, -25) = a'(2, 3, -1) + b'(1, 1, -2)$. Nous avons alors le système :

   $$\begin{cases} 2a' + b' = & 5 \\ 3a' + b' = & 0 \\ -a' - 2b' = & -25 \end{cases} \Longleftrightarrow a' = -5 \quad b = 15$$

   u et v sont bien combinaisons linéaires de x et y, et nous avons : $\text{vect}(\{x, y\}) = \text{vect}(\{u, v\})$

2. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, soient* $v_1 = (-1, 1, 2)$*,* $v_2 = (1, 2, 5)$*,* $v_3 = (3, 1, a)$*,* $v_4 = (2, 1, b)$*. Trouver* a *et* b *pour que* (v_1, v_2) *engendrent le même espace que* (v_3, v_4)

   Rien de nouveau sous le soleil !! On refait la même question !!

   — Recherchons λ et μ tels que $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Nous avons alors le système :

   $$\begin{cases} -\lambda + \mu = & 3 \\ \lambda + 2\mu = & 1 \\ 2\lambda + 5\mu = & a \end{cases} \Longleftrightarrow \mu = \frac{4}{3} \quad \lambda = \frac{-5}{3}$$

   Donc $a = \dfrac{10}{3}$

   — De même, recherchons λ et μ tels que $v_4 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Nous avons alors le système :

   $$\begin{cases} -\lambda + \mu = & 2 \\ \lambda + 2\mu = & 1 \\ 2\lambda + 5\mu = & b \end{cases} \Longleftrightarrow \mu = 1 \quad \lambda = -1$$

   Donc $b = 3$

Exercice 22 :

Enoncé de l'exercice

1. *On considère* $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$*, espace vectoriel des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Montrer que si* $r \neq s$*, alors les fonctions* $f_r(x) = e^{rx}$ *et* $f_s(x) = e^{sx}$ *sont linéairement indépendantes, et quel est l'ensemble engendré par les fonctions* f_r *et* f_s

   Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'implication suivante est vraie :

   $$\lambda f_r + \mu f_s = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

   Où $\mathcal{O}$ désigne la fonction nulle.

   Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et$\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f_r + \mu f_s = \mathcal{O}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f_r(x) + \mu f_s(x) = 0$, c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{rx} + \mu e^{sx} = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est en particulier vrai pour $x = 0$ et $x = +1$, et nous avons alors le système d'équations :

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \quad \text{pour } x = 0 \\ \lambda e^r + \mu e^s = & 0 \quad \text{pour } x = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = & -\mu \\ \lambda\left(e^r - e^s\right) = & 0 \end{cases}$$

Comme, $r \neq s$, nous avons $e^r - e^s \neq 0$, donc $\lambda = 0$ et donc $\mu = 0$
Les fonctions $f_r(x) = e^{rx}$ et $f_s(x) = e^{sx}$ sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'espace vect $(\{f_r, f_s\})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2. *Même question avec $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$*

Nous recommençons le même travail !!
Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'implication suivante est vraie :

$$\lambda f + \mu g = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

Où $\mathcal{O}$ désigne la fonction nulle.
Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et$\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = \mathcal{O}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$, c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda |x| + \mu \cos x = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est en particulier vrai pour $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, et nous avons alors le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mu & = & 0 & \text{pour } x = 0 \\ \lambda \times \dfrac{\pi}{2} & = & 0 & \text{pour } x = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array} \right.$$

Les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$ sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'espace vect $(\{f, g\})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

6.7.5 Bases d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel

Exercice 24 :

Enoncé de l'exercice

1. *Cet exercice se place dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel Pour $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a', b') \in \mathbb{R}^2$, nous définissons le déterminant $\det(u, v)$ de ces deux vecteurs par :*

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Démontrez que $\det(u, v) = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires

— **Supposons u et v colinéaires**
Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$, et si u est le couple $u = (x, y)$, v sera le couple $v = (\lambda x, \lambda y)$. Donc,

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} x & \lambda x \\ y & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda yx - \lambda xy = 0$$

— **Réciproquement, supposons** $\det(u, v) = 0$
Si u est le couple $u = (a, b)$ et $v = (a', b')$ et sont tels que $\det(u, v) = ab' - a'b = 0$, nous avons alors $ab' = a'b$
Nous sommes alors très tentés de dire qu'alors $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, mais c'est aller vite en besogne car l'un des dénominateurs peut être nul. Il faut donc discuter suivant les différents cas

(a) Supposons $a' = 0$
Alors $ab' = 0$, et donc $a = 0$ ou $b' = 0$
— Si $a = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (0, b)$ et $v = (0, b')$, et les vecteurs u et v sont bien colinéaires donc linéairement dépendants.
— Si $b' = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, b)$ et $v = (0, 0)$, et les vecteurs u et v sont bien linéairement dépendants

(b) Supposons $b' = 0$ Alors $a'b = 0$, et donc $a' = 0$ ou $b = 0$
— Si $a' = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, b)$ et $v = (0, 0)$, et les vecteurs u et v sont bien linéairement dépendants.
— Si $b = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, 0)$ et $v = (a', 0)$, et les vecteurs u et v sont colinéaires donc linéairement dépendants.

(c) Supposons $a' \neq 0$ et $b' \neq 0$

Alors $ab' = a'b$ est équivalent à $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$, et donc $a = ka'$ et $b = kb'$ et les vecteurs u et v sont de la forme $u = (ka', kb')$ et $v = (a', b')$, et les vecteurs u et v sont colinéaires donc linéairement dépendants.

Dans tous les cas, donc, si $\det(u, v) = 0$, alors u et v sont colinéaires

2. *Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la famille $\{(m,4), (1,m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$*

Nous sommes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Si nous montrons que la famille de 2 vecteurs $\{(m,4), (1,m)\}$ est libre, nous aurons montré que c'est une base de $\mathbb{R}^2$

Pour montrer qu'elle est libre, on calcule le déterminant de ces deux vecteurs.

$$\det[(m,4), (1,m)] = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Donc, $\det[(m,4), (1,m)] = 0$ si et seulement si $m = +2$ ou $m = -2$

En conclusion, la famille de vecteurs $\{(m,4), (1,m)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $m \neq +2$ **et** $m \neq -2$

3. (a) *Vérifier que la famille $\{(1,4), (1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$*

Pour le montrer, il suffit d'utiliser le déterminant

(b) *Quel est le couple qui a pour coordonnées $(-1,2)$ dans la base $\{(1,4), (1,1)\}$*

Soit (x, y) ce couple. S'il a pour coordonnées (a, b) dans la base $\{(1,4), (1,1)\}$, alors

$$(x, y) = a(1,4) + b(1,1)$$

Donc, dans notre cas,

$$(x, y) = -1 \times (1,4) + 2 \times (1,1) = (3, -2)$$

(c) *Quelles sont les coordonnées du couple $(1,5)$ dans cette base ?*

Il faut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(1,5) = a(1,4) + b(1,1)$$

Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} a + b = & 1 \\ 4a + b = & 5 \end{cases} \iff a = \frac{4}{3} \text{ et } b = \frac{-1}{3}$$

Les coordonnées du couple $(1,5)$ dans la base $\{(1,4), (1,1)\}$ sont donc $a = \frac{4}{3}$ et $b = \frac{-1}{3}$

Exercice 25 :

Enoncé de l'exercice

1. *Démontrer que $u = (1,2,3)$ et $v = (1, 1-4)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.*

Il est évident que ces deux vecteurs u et v forment une famille libre, puisque leurs coordonnées ne sont pas colinéaires.

2. *Trouver un triplet w, qui avec les deux précédents forme une base de $\mathbb{R}^3$*

Tout d'abord, il ne faut pas que w soit combinaison linéaire de u et v, c'est à dire que $w \notin \text{vect}(\{u, v\})$

En choisissant $w = (0,0,1)$, w n'est certainement pas combinaisons linéaire de $u$et v, et forme avec u et v, un système de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$. Nous allons prouver, en utilisant le pivot de Gauss que nousavons affaire à une famille libre.

(a) Nous partons du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(b) Nous faisons les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} C'_1 & = & C_1 \\ C'_2 & = & C_2 - C_1 \\ C'_3 & = & C_3 - C_1 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) Puis, la dernière combinaison linéaire :

$$\begin{array}{rcl} C''_1 & = & C'_1 \\ C''_2 & = & C'_2 \\ C''_3 & = & 2C'_3 - C'_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

Nous arrivons à un système triangulaire qui montre que le rang est 3

Exercice 26 :

Corrigé de l'exercice

On considère le sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ défini par $F = \left\{(a+2b, 2a-b, 3b)\,;(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base

Soit $x \in F$ un élément de F ; il existe alors $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = (a+2b, 2a-b, 3b)$$

A partir de là, nous pouvons écrire différemment x :

$$\begin{array}{rl} x = & (a+2b, 2a-b, 3b) \\ = & (a, 2a, 0) + (2b, b, 3b) \\ = & a\,(1,2,0) + b\,(2,1,3) \end{array}$$

Ce qui montre que $F = \text{vect}\left(\{(1,2,0), (2,1,3)\}\right)$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
Si la famille $\{(1,2,0), (2,1,3)\}$ est génératrice de F, en est-elle pour autant une base ? ? Il faut donc montrer qu'elle est libre. Or, les coordonnées de ces 2 triplets ne sont pas proportionnelles. Donc, une base de F est donc $\{(1,2,0), (2,1,3)\}$

Exercice 28 :

Enoncé de l'exercice

1. *Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $u = (-1,1,-3)$, $v = (1,2,5)$, $w = (1,7,1)$.*

   Nous allons utiliser la méthode du pivot de Gauss.

   (a) Nous partons du tableau suivant *(qui est en fait, une matrice)*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Nous faisons les combinaisons linéaires entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C'_1 & = & C_1 \\ C'_2 & = & C_2 + C_1 \\ C'_3 & = & C_3 + C_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Nous faisons, à nouveau, les combinaisons linéaires entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'' & = & C_1' \\ C_2'' & = & C_2' \\ C_3'' & = & 3C_3' - 8C_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -22 \end{pmatrix}$$

Le système est triangulaire. La famille $\{u, v, w\}$ est de rang 3, dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

2. *Le vecteur $a = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v, w)$? Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u,v et w*

Comme nous venons de montrer, $\text{Vect}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$; donc, $a \in \text{Vect}(u, v, w)$
Il existe donc $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $a = xu + yv + zw$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 0 = & x + 2y + 7z \\ 0 = & -3x + 5y + z \end{array}\right.$$

Nous allons résoudre ce système, en utilisant une méthode de Gauss, mais, cette fois-ci, en jouant sur les lignes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1' & = & L_1 \\ L_2' & = & L_2 + L_1 \\ L_3' & = & L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -3 = & 2y - 2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -\dfrac{3}{2} = & y - z \end{array}\right.$$

Seconde combinaison linéaire entre les lignes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1'' & = & L_1' \\ L_2'' & = & L_2' \\ L_3'' & = & 3L_3' - L_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -\dfrac{11}{2} = & -11z \end{array}\right.$$

D'où nous tirons $z = \dfrac{1}{2}$, et, en remontant, $y = -1$ et $x = -\dfrac{3}{2}$

3. *Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 2, 1)$, $c = (3, 3, 3)$ et $d = (7, 0, -7)$*

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, la famille $\{a, b, c, d\}$ ne peut pas être de rang 4 ; elle sera **au plus de rang 3**
Pour connaître son rang, nous utilisons le pivot de Gauss. On commence donc par construire un tableau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) On fait une première combinaison linéaire entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1' & = & C_1 \\ C_2' & = & C_2 - 3C_1 \\ C_3' & = & C_3 - 3C_1 \\ C_4' & = & C_4 - 7C_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & -14 \\ 3 & -8 & -6 & -28 \end{bmatrix}$$

On peut déjà remarquer des similitudes entre C_2', C_3' et C_4'

(b) On fait une seconde combinaison linéaire entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'' & = & C_1' \\ C_2'' & = & C_2' \\ C_3'' & = & 4C_3' - 3C_2' \\ C_4'' & = & 4C_4' - 14C_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Clairement, le système est de rang 2

4. *Déterminer dans* $\mathbb{R}^4$ *le rang de la famille* $\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ *où* $a = (1, 1, 1, 2)$, $b = (2, 1, 0, 3)$, $c = (-1, 0, -1, 4)$ *et* $d = (-9, -2, 1, -1)$

   Ici, nous avons 4 vecteurs pris dans $\mathbb{R}^4$; le système est peut-être de rang 4. La méthode de pivot de Gauss, déjà exposée devrait répondre à la question.

Exercice 29 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *, on pose* $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ *etd* $= (5, 0, -7)$. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(\{a, b\}) = \mathrm{Vect}(\{c, d\})$.

Pour répondre à cette question, il faut démontrer que $c \in \mathrm{Vect}(\{a, b\})$ et $d \in \mathrm{Vect}(\{a, b\})$, et, pour ce faire, il suffit de démontrer que c est combinaison linéaire de a et b, et de même pour d

1. **Montrons que c est combinaison linéaire de a et b**
   Pour cela, il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$c = \lambda a + \mu b$$

   Nous arrivons alors à un système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 3 = & 2\lambda + \mu \\ 7 = & 3\lambda - \mu \\ 0 = & -\lambda - 2\mu \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 3 = & 2\lambda + \mu \\ 7 = & -7\mu \\ \lambda = & -2\mu \end{array}\right.$$

   D'où, d'après les deux dernières équations : $\mu = -1$, $\lambda = 2$, ce qui est compatible avec la première équation. Donc,

$$c = 2a - b$$

2. **Montrons que d est combinaison linéaire de a et b**
   Pour cela, il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$d = \lambda a + \mu b$$

   Nous arrivons alors à un système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 5 = & 2\lambda + \mu \\ 0 = & 3\lambda - \mu \\ -7 = & -\lambda - 2\mu \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 5 = & 2\lambda + \mu \\ \mu = & 3\lambda \\ -7 = & -7\lambda \end{array}\right.$$

   D'où, d'après les deux dernières équations : $\lambda = 1$, $\mu = 3$, , ce qui est compatible avec la première équation. Donc,

$$c = a + 3b$$

Nous avons donc bien $\mathrm{Vect}(\{a, b\}) = \mathrm{Vect}(\{c, d\})$

Exercice 31 :

Enoncé de l'exercice

Construire une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, *ensemble des triplets* (x, y, z) *vérifiant*

1. $x = z - y$

   Voilà l'équation d'un plan. Un plan est un sous-espace vectoriel de dimension 2 ; une base de ce plan contient obligatoirement 2 vecteurs. L'énoncé nous demande donc de trouver une base de ce plan. Soit :

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = z - y\right\}$$

   On peut définir autrement P :

$$P = \left\{(z - y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$$

Donc,

$$u \in P \Longleftrightarrow u = (z-y, y, z) = (z, 0, z) + (-y, y, 0) = z\,(1, 0, 1) + y\,(-1, 1, 0)$$

Les triplets $(1, 0, 1)$ et $(-1, 1, 0)$ engendrent clairement P ; leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, ils forment une famille libre, et donc une base de P.
Une base de P est donc $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$

2. $x + y + z = -x + 3y + 2z = 0$

   Cette fois ci, c'est l'équation d'une droite *(intersection de 2 plans)*. Une base de cette droite, n'est constituée que d'un seul vecteur. Soit :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = -x + 3y + 2z = 0\right\}$$

   Nous avons, en fait :

$$\begin{cases} x+y+z = & 0 \\ -x+3y+2z = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = & -z \\ -x+3y = & -2z \end{cases}$$

   D'où on tire $4y = -3z \Longleftrightarrow y = \dfrac{-3}{4}z$ et $-4x = z \Longleftrightarrow x = \dfrac{-1}{4}z$ On peut définir autrement D :

$$P = \left\{\left(\frac{-1}{4}z, \frac{-3}{4}z, z\right) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } z \in \mathbb{R}\right\}$$

   Donc,

$$u \in D \Longleftrightarrow u = \left(\frac{-1}{4}z, \frac{-3}{4}z, z\right) = z\left(\frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, 1\right)$$

   Le triplet $\left(\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-3}{4}, 1\right)$ engendre clairement D et forme une base de D.
   Une autre base de D pourrait être $(1, 3, -4)$

6.7.6 Miscelleanous

Exercice 32 :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$5f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On appelle $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques d'une variable réelle 2 fois différentiables. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; ce qui ne pose aucune difficulté, puisque la dérivation est linéaire.

Exercice 33 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

1. *$m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre réel, on considère les vecteurs :*

$$\begin{cases} I = & (m-3)\,i + mj \\ J = & (m+1)\,i - j \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs de m la famille $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est-elle libre ou liée ?

   Il suffit de calculer le déterminant de I et J. S'il est non nul, les 2 vecteurs sont linéairement indépendants, et dans V, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, forment donc une base de V. Si le déterminant est nul, le système est lié.

$$\det(I, J) = \begin{vmatrix} m-3 & m \\ m+1 & -1 \end{vmatrix} = -(m-3) - m(m+1) = 3 - m - m^2 - m = -m^2 - 2m + 3 = -(m-1)(m+3)$$

- Ainsi, $\det(I,J)=0$ si et seulement si $m=1$ ou $m=-3$, et à ce moment le système est lié
  - ▷ Si $m=1$, alors :
$$\begin{cases} I = & -2i+j \\ J = & 2i-j \end{cases}$$
    C'est à dire $I=-J$
  - ▷ Si $m=-3$, alors :
$$\begin{cases} I = & -6i-3j \\ J = & -2i-j \end{cases}$$
    C'est à dire $I=3J$
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -3$, alors la famille $\mathcal{F}=\{I,J\}$ est une base de V

2. *On suppose $m=2$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de V de coordonnées (x,y) dans la base $\mathcal{B}_0=\{i,j\}$ et de coordonnées (X,Y) dans la base $\mathcal{F}=\{I,J\}$. Calculer x et y en fonction de X et Y*

   Nous avons donc :
$$\begin{cases} I = & -i+2j \\ J = & 3i-j \end{cases}$$
   $\overrightarrow{v}$ s'écrit dans la base $\mathcal{F}=\{I,J\}$: $\overrightarrow{v}=XI+YJ$ et dans la base $\mathcal{B}_0=\{i,j\}$, $\overrightarrow{v}=xi+yj$. Nous avons, dans ce cas, $XI+YJ=xi+yj$, c'est à dire $X(-i+2j)+Y(3i-j)=xi+yj \iff (-X+3Y)i+(2X-Y)j=xi+yj$, d'où nous obtenons :
$$\begin{cases} x = & -X+3Y \\ y = & 2X-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = & \frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y \\ Y = & \frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \end{cases}$$

   Pour aller plus loin

   Il est possible de regarder le problème d'un point de vue matriciel. Nous avons, en fait :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
   De telle sorte que
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   Or, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

   Nous retrouvons bien les résultats établis dans la résolution.

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ indexés par le paramètre $m\in\mathbb{R}$ P_m et Q_m :
$$P_m(X)=(m-14)X^2+(m-5)X+3 \qquad Q_m(X)=5X^2-2mX+m$$
Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(\{P_m;Q_m\})$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-il de dimension 2, de dimnsion 1 ?

D'autre part, nous avons $\dim\mathrm{vect}(\{P_m;Q_m\})\leqslant 2$. Si P_m et Q_m ne sont pas colinéaires, alors $\dim\mathrm{vect}(\{P_m;Q_m\})=2$; sinon, $\dim\mathrm{vect}(\{P_m;Q_m\})=1$.
Dans tous les cas, ni P_m, ni Q_m ne sont les polynômes nuls.
Les polynômes P_m et Q_m sont colinéaires s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P_m=\lambda Q_m$, ce qui veut dire qu'au niveau des coefficients, nous avons :
$$m-14=\lambda 5 \qquad m-5=-2\lambda m \qquad 3=\lambda m$$
Ce qui nous donne :
$3=\lambda m$, puis $m=5-2\lambda m=5-6=-1$ et $\lambda=3$
Ainsi :

- Si $m=-1$, les polynômes P_{-1} etQ_{-1} sont colinéaires et nous avons alors $\lambda=-3$ et $\dim\mathrm{vect}\left(\{P_{-1};Q_{-1}\}\right)=1$. Pour plus de précisions, nous avons :

$$P_{-1}(X)=-15X^2-6X+3 \qquad Q_{-1}(X)=5X^2+2X-1$$

- Si $m\neq-1$, nous avons $\dim\mathrm{vect}\left(\{P_m;Q_m\}\right)=2$

Exercice 35 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. *Démontrer que, pour tout vecteur $u\in V$, $v\in V$ et $w\in V$, nous avons l'équivalence :*

$$\{u,v,w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{u,u+v,u+v+w\} \text{ libre}$$

- Supposons que la famille $\{u,v,w\}$ soit libre. Démontrons que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ est libre.
  Soient donc $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que : $\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+v+w)=\overrightarrow{0}$
  Nous avons :

$$\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+v+w)=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)u+(\beta+\gamma)v+\gamma w=\overrightarrow{0}$$

  De l'indépendance de la famille $\{u,v,w\}$, nous avons :

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma= & 0\\ \beta+\gamma= & 0\\ \gamma= & 0\end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

  Ce qui montre que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ est libre
- Réciproquement, supposons que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ soit libre et démontrons que la famille $\{u,v,w\}$ est libre.
  Pour nous simplifier la vie, nous posons :

$$X=u \qquad Y=u+v \qquad Z=u+v+w$$

  Par hypothèse, la famille $\{X,Y,Z\}$ et nous avons :

$$u=X \qquad v=Y-X \qquad w=Z-Y$$

  Soient donc $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que : $\alpha u+\beta v+\gamma w=\overrightarrow{0}$. Alors, nous avons :

$$\alpha X+\beta(Y-X)+\gamma(Z-Y)=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)X+(\beta-\gamma)Y+\gamma Z=\overrightarrow{0}$$

  De l'indépendance de la famille $\{X,Y,Z\}$, nous avons :

$$\begin{cases}\alpha-\beta= & 0\\ \beta-\gamma= & 0\\ \gamma= & 0\end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

  Ce qui montre que la famille $\{u,v,w\}$ est libre

2. *Soit $A\in V$, le vecteur de coordonnées $(1,3,5)$ dans la base $\{u,v,w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{u,u+v,u+v+w\}$*

   Nous avons $A=u+3v+5w$. Dans la question précédente, nous avons : $u=X$, $v=Y-X$, $w=Z-Y$, donc :

$$A=X+3(Y-X)+5(Z-Y) \Longleftrightarrow A=-2X-2Y+5Z$$

   Les coordonnées de A dans la base $\{u,u+v,u+v+w\}$ sont donc $(-2,-2,5)$

Exercice 36 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$

1. *On considère les vecteurs :*
$$\begin{cases} I = & i - j + 2k \\ J = & 2i + j - k \\ K = & 3i - j + 4k \end{cases}$$
Montrer que la famille $\{I, J, K\}$ est une base de V

   C'est très classique ! ! Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha I + \beta J + \gamma K = \overrightarrow{0}$. Nous avons alors :

   $\alpha\,(i - j + 2k) + \beta\,(2i + j - k) + \gamma\,(3i - j + 4k) = \overrightarrow{0} \iff (\alpha + 2\beta + 3\gamma)\,i + (-\alpha + \beta - \gamma)\,j + (-2\alpha - \beta + 4\gamma)$

   La famille $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ étant une base, nous avons donc le système suivant :
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = & 0 \\ -\alpha + \beta - \gamma = & 0 \\ -2\alpha - \beta + 4\gamma = & 0 \end{cases}$$
   C'est un système de Cramer dont nous pouvons calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ En combinant les lignes, nous obtenons :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 24$$
   Résultat que nous aurions pu obtenir en développant par rapport à la première ligne :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 24$$
   Le déterminant étant non nul, le système n'admet comme unique solution que : $\alpha = \beta = \gamma = 0$
   La famille $\{I, J, K\}$ est donc une base de V

2. *Calculer les coordonnées du vecteur $v = i + j + k$ dans la base $\{I, J, K\}$*

   Nous avons toujours $v = i + j + k = XI + YJ + ZK \iff i + j + k = X\,(i - j + 2k) + Y\,(2i + j - k) + Z\,(3i - j + 4k)$ D'où nous obtenons :
$$i + j + k = (X + 2Y + 3Z)\,i + (-X + Y - Z)\,j + (2X - Y + 4Z)\,k$$
   De l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous obtenons le système :
$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = & 1 \\ -X + Y - Z = & 1 \\ -2X - Y + 4Z = & 1 \end{cases}$$
   En combinant les lignes, nous obtenons :
$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = & 1 \\ -X + Y - Z = & 1 \\ -2X - Y + 4Z = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X + 2Y + 3Z = & 1 \\ 3Y + 2Z = & 2 \\ 3Y + 10Z = & 3 \end{cases} \iff \begin{cases} X + 2Y + 3Z = & 1 \\ 3Y + 2Z = & 2 \\ 8Z = & 1 \end{cases}$$
   D'où $Z = \dfrac{1}{8}$, $Y = \dfrac{7}{12}$ et $X = \dfrac{-13}{24}$. Les coordonnées de v dans la base $\{I, J, K\}$ sont donc $\left(\dfrac{-13}{24}, \dfrac{7}{12}, \dfrac{1}{8}\right)$

Exercice 37 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$F(X) = X + 1 \quad G(X) = X^2 + X - 1 \quad H(X) = X^2 - 2 \quad I(X) = X - 1$$

1. *Montrer que la famille $\{F, G, H\}$ est une famille liée. Quel est le sous-espace vectoriel* $\text{vect}(\{F, G, H\})$ *engendré par la famille $\{F, G, H\}$*
   - Il est assez facile de voir que $F(X) = G(X) - H(X)$; la famille $\{F, G, H\}$ est donc liée.
   - Les polynômes de $\text{vect}(\{F, G, H\})$ sont tous de la forme $P = aG + bH$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ Et donc

     $$P \in \text{vect}(\{F, G, H\}) \Longleftrightarrow P(X) = aG(X) + bH(X) \Longleftrightarrow P(X) = a\left(X^2 + X - 1\right) + b\left(X^2 - 2\right)$$

     Il est tout à fait possible de remanier $P(X) = a\left(X^2 + X - 1\right) + b\left(X^2 - 2\right)$. nous avons :

     $$\begin{aligned} P(X) = a\left(X^2 + X - 1\right) + b\left(X^2 - 2\right) &\Longleftrightarrow P(X) = (a + b)X^2 + aX - (a + 2b) \\ &\Longleftrightarrow P(X) = AX^2 + AX + (2A - B) \\ &\Longleftrightarrow P(X) = A\left(X^2 + X + 2\right) + B(X - 1) \end{aligned}$$

2. *Montrer que la famille $\{G, H, I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2 + X - 3$ dans cette base*
   - On montre l'indépendance de la famille $\{G, H, I\}$; l'espace alors engendré par $\{G, H, I\}$ sera de dimension 3, et comme $\text{vect}(\{G, H, I\}) \subset \mathbb{R}_2[X]$, nous avons $\text{vect}(\{G, H, I\}) = \mathbb{R}_2[X]$, ce qui terminera de montrer que la famille $\{G, H, I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
     Il faut montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = \mathcal{O}$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$
     Soient donc $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = \mathcal{O}$. Alors :

     $$\alpha\left(x^2 + x - 1\right) + \beta\left(x^2 - 2\right) + \gamma(x - 1) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \gamma)x + (-\alpha - 2\beta - \gamma) = 0$$

     Nous obtenons alors le système :

     $$\left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta = & 0 \\ \alpha + \gamma = & 0 \\ -\alpha - 2\beta - \gamma = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \beta = & -\alpha \\ \gamma = & -\alpha \\ 2\alpha = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

     La famille $\{G, H, I\}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   - A nouveau, il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = P$. Nous aurons donc :

     $$(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \gamma)x + (-\alpha - 2\beta - \gamma) = 4x^2 + x - 3$$

     Nous obtenons alors le système :

     $$\left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta = & 4 \\ \alpha + \gamma = & 1 \\ -\alpha - 2\beta - \gamma = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta = & 4 \\ -\beta + \gamma = & -3 \\ -\beta - \gamma = & 7 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha + \beta = & 4 \\ -\beta + \gamma = & -3 \\ -2\gamma = & 10 \end{array}\right.$$

     D'où, en remontant, $\gamma = -5$, $\beta = -2$ et $\alpha = 6$
   Les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2 + X - 3$ dans la base $\{G, H, I\}$ sont donc $(6, -2, -5)$

Exercice 38 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel E des vecteurs de la forme $E = \left\{(x, y, z)_i n\mathbb{R}^3\right.$ tels que $x =$ et le sous-espace vectoriel F défini par : $\text{vect}(\{(1, 2, 3) ; (1, 3, 4)\})$

1. *Déterminer $E \cap F$*

   Soit $u \in F$;alors $u = \lambda(1,2,3) + \mu(1,3,4)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Si $u \in E \cap F$, alors :

   $$\lambda + \mu = 0 \qquad 2\lambda + 3\mu = y \qquad 3\lambda + 4\mu = z$$

   D'où nous obtenons $y = z = \mu$, de telle sorte que $E \cap F = \text{vect}(\{(0,1,1)\}) = \{(0,\mu,\mu) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}\}$
2. *Déterminer $E + F$*

   Par définition de la somme de sous-espace vectoriels , les vecteurs de $E+F$ sont la somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F, c'est à dire que si $u \in E+F$, alors

   $$u = y(0,1,0) + z(0,0,1) + \lambda(1,2,3) + \mu(1,3,4)$$

   La famille $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3),(1,3,4)\}$ est une famille liée, car :

   $$(1,3,4) = (1,2,3) + (0,1,0) + (0,0,1)$$

   De plus, la famille $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ est libre, puisque si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que :

   $$\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,2,3) = (0,0,0)$$

   Nous avons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} \gamma = & 0 \\ \alpha + 2\gamma = & 0 \\ \beta + 3\gamma = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Nous sommes dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 ; nous avons une famille libre $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ de 3 vecteurs. Cette famille forme donc une base de $\mathbb{R}^3$, et nous pouvons donc conclure que $E + F = \mathbb{R}^3$

Exercice 39 :

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère E l'ensemble des triplets de la forme $(a-b, a, a+b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ainsi que l'ensemble F des triplets (x,y,z) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ et tels que $x = y = z$

1. *Montrer que E et F sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$; en donner une base pour chacun d'eux*

   C'est assez simple.
   - ▷ Les triplets de E s'écrivent $a(1,1,1)+b(-1,0,1)$, de telle sorte que $E = \text{vect}(\{(1,1,1),(-1,0,1)\})$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
     Clairement, la famille $\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$ est une famille libre et forme donc une base de E ; nous avons donc $\dim E = 2$
   - ▷ Les triplets de F s'écrivent $x(1,1,1)$ avec $x \in \mathbb{R}$, de telle sorte que $F = \text{vect}(\{(1,1,1)\})$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
     Clairement, le vecteur $\{(1,1,1)\}$ est une base et nous avons donc $\dim F = 1$

   Nous avons aussi $F \subset E$
2. *Déterminer $E \cap F$ et $E + F$*

   De la question précédente, nous tirons $E \cap F = F$ et $E + F = E$

Exercice 40 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les ensembles suivants :
- $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(X) = aX^2 + bX\}$
- $F = \{Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } Q(X) = \lambda X^2 + \mu X + \lambda\}$

1. *Montrer que E et F sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$; en donner une base pour chacun d'eux*

   Appelons $\{e_0, e_1, e_2\}$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors, tout $P \in E$ s'écrit $P = ae_2 + be_1$ alors que tout $Q \in E$ s'écrit $Q = \lambda(e_2 + e_0) + \mu e_1$. Nous pouvons donc dire que :

- $E = \text{vect}(\{e_2, e_1\})$
- $F = \text{vect}(\{e_2 + e_0, e_1\})$

Ce sont donc des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ de base, pour E, $\{e_2, e_1\}$, et pour F $\{e_2 + e_0, e_1\}$. Nous avons $\dim E = \dim F = 2$

2. *Déterminer $E \cap F$ et $E + F$*
   - Si $u \in E \cap F$, alors, $u(X) = aX^2 + bX = \lambda X^2 + \mu X + \lambda$, et donc, en identifiant :
   $$a = \lambda \qquad b = \mu \qquad \lambda = 0$$
   Et donc $u(x) = bx$. Nous avons donc $E \cap F = \text{vect}(\{e_1\})$
   - Si $P \in E + F$, alors $P(X) = aX^2 + bX + \lambda X^2 + \mu X + \lambda = (a + \lambda) X^2 + (b + \mu) X + \lambda$
   Donc $E + F = \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 41 :

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire réel.

1. *Une matrice symétrique est du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$*

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Nous avons alors :
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
   Dont on déduit $b = c$. D'où, une matrice symétrique est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

2. *Une matrice antisymétrique est du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$*

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Nous avons alors :
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$
   Dont on déduit
   $$a = -a \qquad b = -c \qquad d = -d$$
   D'où, $a = d = 0$ et une matrice antisymétrique est bien du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$

3. *$\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
   - Si $A \in \mathcal{S}$, alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha E_{1,1} + \beta(E_{1,2} + E_{2,1}) + \gamma E_{2,2}$ Ainsi, $\mathcal{S} = \text{vect}(\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\})$ et $\mathcal{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   D'autre part, $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\}$ est clairement une famille libre et donc une base de $\mathcal{S}$; donc $\dim \mathcal{S} = 3$
   — Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \delta(E_{2,1} - E_{1,2})$ Ainsi, $\mathcal{A} = \text{vect}(\{(E_{2,1} - E_{1,2})\})$ et $\mathcal{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   D'autre part, $\dim \mathcal{A} = 1$

4. *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
   - Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; alors : $A = \dfrac{1}{2}(A + A^T) + \dfrac{1}{2}(A - A^T)$

- ◇ $A + A^T$ est une matrice symétrique puisque $\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A$
- ◇ $A - A^T$ est une matrice antisymétrique puisque $\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right)$

Donc, toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, ce qui nous permet d'écrire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{A} + \mathcal{S}$

- Démontrons que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Soit donc $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \delta = -\delta \qquad \gamma = 0$$

d'où $\beta = \delta = 0$ et A est donc la matrice nulle.

Ainsi $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et nous pouvons écrire $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

5. *A l'aide d'une base de $\mathcal{A}$ et d'une base de $\mathcal{S}$, donner une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

- Une base de $\mathcal{S}$ est donc $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\}$
- Une base de $\mathcal{A}$ est donc $\{(E_{2,1} - E_{1,2})\}$

Une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc : $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), (E_{2,1} - E_{1,2}), E_{2,2}\}$