7.12 Problèmes de synthèse

Exercice 67 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2m & \frac{5}{16}(m-1) \\ m-1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer, en fonction des valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le noyau et l'image de f
2. Existe-t-il des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles :
   (a) f est une homthétie vectorielle
   (b) f est une projection vectorielle
   (c) f est une symétrie vectorielle
   Les caractériser quand elles existent

Exercice 68 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. A quelle condition avons nous $\mathrm{Im} f = \ker f$?
2. On suppose $\mathrm{Im} f \neq \ker f$
   (a) En prenant pour nouvelle base $\{I, J\}$ où $I \in \mathrm{Im} f$ et $J \in \ker f$, trouver la matrice de f dans la base $\{I, J\}$
   (b) Montrer que f est la composée de 2 applications linéaires simples que l'on définira.
3. On suppose cette fois ci que $\mathrm{Im} f = \ker f$
   (a) Montrer que $b \neq 0$ et que $\{bi - aj, j\}$ est une base de E
   (b) Quelle est la matrice de f dans cette base ?
   (c) Que pouvons-nous dire de $f \circ f$?

Exercice 69 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle Id_E l'application identique de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E

1. Démontrer que f est un projecteur si et seulement si $(f - \mathrm{Id}_E)$ en est un
2. Démontrer que, si f est un projecteur, alors $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \ker f$
3. Vérifier ces résultats dans les cas suivants :
   (a) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :
   $$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
   (b) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :
   $$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 70 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle Id_E l'application identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, nous désignons par :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^2 = f \circ f \quad f^3 = f \circ f^2 \quad \cdots \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$

1. Soient f et g 2 projecteurs de E
   (a) Démontrer que si $f \circ g + g \circ f = \mathcal{O}_E$, alors $f \circ g = g \circ f = \mathcal{O}_E$
   (b) A quelle condition nécessaire et suffisante $f+g$ est-il un projecteur ? Déterminer alors $\mathrm{Im}\,(f+g)$ et $\ker\,(f+g)$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'égalité :
   $$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$$
   où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$
   (a) Démontrer que $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_E)$ sont des projecteurs.
   (b) Exprimer f comme combinaison linéaire de p et q
   (c) Calculer f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$
   (d) Démontrer que si $ab \neq 0$, alors f est bijective. Exprimer alors f^{-1} en fonction de p et q
3. Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$ et que la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\{i, j, k\}$ est :
   $$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \dfrac{1}{m} & 0 & m \\ \dfrac{1}{m^2} & \dfrac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \text{ où } m \in \mathbb{R}^*$$
   (a) Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$
   (b) En déduire la matrice de f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis celle de f^{-1}

Exercice 71 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

1. Nous définissons les endomorphismes f^2, f^3,..., f^n par :
   $$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^2 = f \circ f \quad f^3 = f \circ f^2 \quad \cdots \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$
   Calculer, par récurennce, la matrice de f^n
2. Soit $u_0 \in E$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $u_n = f^n(u_0)$. Exprimer les coordonnées (x_n, y_n) en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$ et de x_0 et y_0
3. On considère les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
   $$\begin{cases} a_0 = -2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = -\dfrac{1}{2}b_{n-1} \end{cases}$$
   Exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice 72 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'ensemble F des vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $f(u) = \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer
2. Vérifier que $I = i - j$ et $J = i + j$ sont 2 vecteurs de F et qu'ils déterminent une base de E
3. (a) Calculer A' la matrice de f dans la base $\{I, J\}$
   (b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
   (c) Démontrer que $\mathcal{M}(f) = PA'P^{-1}$
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{M}(f))^n = PA'^n P^{-1}$
4. (a) Démontrer que $\mathcal{M}(f)$ et A' son inversibles
   (b) On pose :
   - $A^0 = A'^0 = \mathrm{Id}_E$
   - Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geqslant 0$:

   $$\mathcal{M}(f)^n = \left(\mathcal{M}(f)^{-1}\right)^{-n} \qquad A'^n = \left(A'^{-1}\right)^{-n}$$

   Démontrer que nous avons $(\mathcal{M}(f))^n = PA'^n P^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$
   (c) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer A'^n et en déduire $\left(\mathcal{M}(f)^{-1}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 73 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que, s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in E$, non nul, tel que $f(u) = \lambda u$, alors λ est racine du polynôme P :

   $$P(X) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$$

2. Réciproquement, démontrez que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P, alors il existe au moins un vecteur non nul $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$
3. On suppose que, dans cette question, le polynôme P a 2 racines réelles λ_1 et λ_2
   (a) Démontrer que toute famille de vecteurs non nuls $\{u_1, u_2\}$ tels que $f(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $f(u_2) = \lambda_2 u_2$ forme une base de E
   (b) Quelle est alors la matrice A de f dans la base $\{u_1, u_2\}$?
   (c) Nous nous intéressons au cas où $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
      i. Déterminer λ_1, λ_2,u_1 et u_2 et A' la matrice de f dans la base $\{u_1, u_2\}$.
      ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A'^n puis $(\mathcal{M}(f))^n$
4. On suppose, dans cette question que P admet une racine double λ
   (a) Démontrer qu'il existe une famille de vecteurs non nuls $\{u_1, u_2\}$ de E dans laquelle la matrice de f est du type $B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 74 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. L'objet de cet exercice est d'étudier les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f^3 = \mathrm{Id}_E$
Soit donc $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}_E$

1. Démontrer que f est un automorphisme *(Donc $f \in \mathrm{GL}(E)$)*
2. Soit $u \in E$, non nul tel que $f(u) = u$
   (a) Soit $v \in E$ tel que la famille $\{u, v\}$ soit une base de E. Nous posons $f(v) = \lambda u + \mu v$. Ecrire $f^2(v)$ dans la base $\{u, v\}$
   (b) Démontrer que s'il existe $u \in E$, non nul tel que $f(u) = u$, alors $f = \mathrm{Id}_E$
3. On suppose, dans cette question $f \neq \mathrm{Id}_E$
   (a) Montrer que si $u \in E$, non nul, alors, la famille $\{u, f(u)\}$ forme une base de E
   (b) En déduire quela matrice de f dans la base $\{u, f(u)\}$ est du type $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$
   (c) Montrer que nous avons nécessairement $a = b = -1$

Exercice 75 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On désigne par Id_E l'application identique de E et par $\mathcal{O}_E$ l'application linéaire nulle de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que :

$$10f^2 - 7f - 3\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \tag{7.2}$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et calculer f^{-1}
2. Démontrer que la famille $\{f; \mathrm{Id}_E\}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si :
$$f \neq \mathrm{Id}_E \text{ et } f \neq -\frac{3}{10}\mathrm{Id}_E$$
3. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de f et Id_E. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau, commutatif et unitaire de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$
4. Trouver tous les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des projecteurs.
   On trouvera, en plus de Id_E et $\mathcal{O}_E$ 2 autres endomorphismes qui sont des projecteurs ; Soient p et q ces projecteurs.
   (a) Exprimer p et q en fonction de f etId_E
   (b) Démontrer que $p \circ q = q \circ p = \mathcal{O}_E$
5. Dans cette question, on suppose que $\dim E = 2$
   (a) Montrer que l'endomorphisme f de matrice dans une base de E : $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ vérifie la relation 7.2
   (b) Déterminer, par leur matrice, les endomorphismes p et q
   (c) Trouver noyau et image de p et q