Chapitre 7

Applications linéaires

7.1 Définitions et premières propriétés

7.1.1 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F la donnée d'une application $f : E \longrightarrow F$ telle que :

1. $\forall u \in E$, $\forall v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall u \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f(au) = af(u)$.

Remarque 1 :

1. La définition 7.1.1 est équivalente à :

$$\boxed{(\forall u \in E), (\forall v \in E)(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(f(au+bv) = af(u) + bf(v))}$$

   La démonstration en est simple.

   Soient $u \in E$, $v \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

   Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $au \in E$ et $bv \in E$, et de la propriété d'application linéaire de f, nous avons :

$$f(au+bv) = f(au) + f(bv)$$

   En itérant la propriété d'application linéaire , nous avons $f(au) = af(u)$ et $f(bv) = bf(v)$. D'où nous avons :

$$f(au+bv) = af(u) + bf(v)$$

2. On peut très bien généraliser cette définition :

   $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $u_1 \in E \ldots, u_n \in E$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

   La démonstration se fait, facilement, par récurrence sur n

Exemple 1 :

Voici quelques exemples d'applications linéaires :

1. Les homothéties sont des applications linéaires

   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $a \in \mathbb{R}$. On appelle homothétie de rapport a l'application $h_a : E \longrightarrow E$:

$$\begin{cases} h_a : E & \longrightarrow & E \\ \quad u : & \longmapsto & h_a(u) = au \end{cases}$$

   Une homothétie est une application linéaire

En effet :

- Soient $u \in E$ et $v \in E$, nous avons :

$$h_a(u+v) = a(u+v) = au + av = h_a(u) + h_a(v)$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$,

$$h_a(\lambda u) = a(\lambda u) = \lambda(au) = \lambda h_a(u)$$

h_a est donc bien linéaire

(a) Si $a = 1$, alors, $h_1(u) = u$ et l'homothétie h_1 est l'application identique notée Id_E.

(b) Si $a = -1$, alors, $h_{-1}(u) = -u$ et l'homothétie h_{-1} est l'application $-\mathrm{Id}_E$ qui peut être vue comme une symétrie centrale.

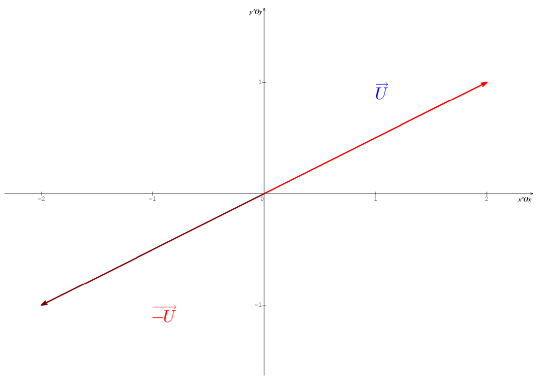

FIGURE 7.1 – Visualisation de l'homothétie de rapport -1

(c) Si $a = 0$, l'homothétie h_0 est l'application nulle souvent notée $\mathcal{O}_E$

2. L'application $t_{\overrightarrow{w}}$ de translation par un vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul de E définie par $t_{\overrightarrow{w}}(u) = u + w$ **n'est pas une application linéaire .**

   On choisit, pour le démontrer, de prendre un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.
   On considère pour $\overrightarrow{w} = (1,1)$; alors,

$$t_{\overrightarrow{w}}[(x,y)] = (x,y) + (1,1) = (x+1, y+1)$$

   Il suffit, maintenant, de prendre des cas particuliers :

$$\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] = (2,1) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] = (1,2) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] + t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] = (3,3) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)+(0,1)] = t_{\overrightarrow{w}}[(1,1)] = (2,2) \end{array}$$

   Nous avons donc $t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] + t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] \neq t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)+(0,1)]$ Et c'est donc fini ! !

3. Dans l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, l'application ϕ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \phi(P) = P(\alpha) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

   est une application linéaire

   En effet, soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + \mu Q) = & \ (\lambda P + \mu Q)(\alpha) \\ = & \ (\lambda P)(\alpha) + (\mu Q)(\alpha) \\ = & \ \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha) \\ = & \ \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q) \end{aligned}$$

   Ce qui montre que ϕ est bien une application linéaire

4. On appelle $\mathcal{C}^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$; alors :

$$\begin{cases} \phi : \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{cases}$$

est une application linéaire. C'est l'expression de la **linéarité de l'intégrale**.

5. Soit a un réel et $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{cases} ev_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & ev_a(f) = f(a) \end{cases}$$

appelée **évaluation de f en a** est une application linéaire. La démonstration de la linéarité de ev_a est semblable à celle de 3

6. Dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère l'application $D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ où f' est la fonction dérivée de f
D est linéaire. C'est **l'expression de la linéarité de la dérivation.**

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{cases} t_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ f & \longmapsto & t_a(f) \end{cases}$$

où $t_a(f)$ est la fonction définie par $t_a(f)(x) = f(x+a)$ est une application linéaire. Le graphe de $t_a(f)$ est le translaté du graphe de f par le vecteur $(-a, 0)$.

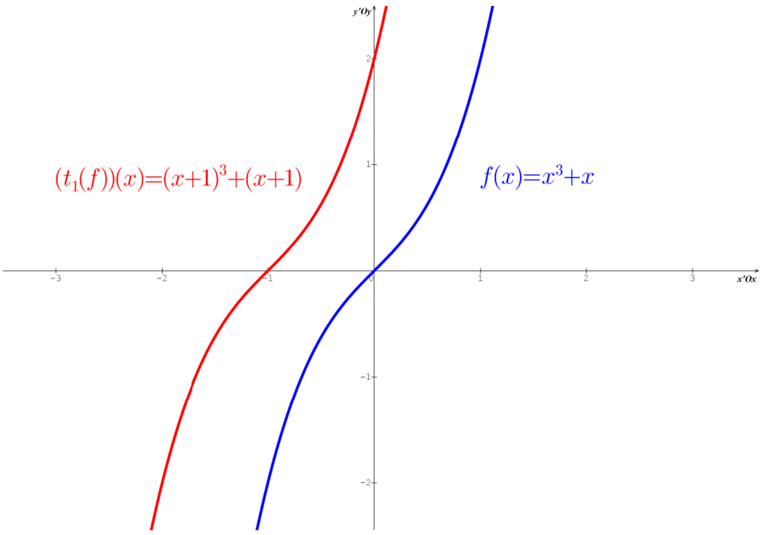

FIGURE 7.2 – Les graphes de la fonction $f(x) = x^3 + x$ et de sa translatée $t_1(f)$

Démontrons que t_a est une application linéaire.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{F}$; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} t_a(\lambda f + \mu g)(x) = & \ (\lambda f + \mu g)(x+a) \\ = & \ (\lambda f)(x+a) + (\mu g)(x+a) \\ = & \ \lambda f(x+a) + \mu g(x+a) \\ = & \ \lambda t_a(f)(x) + \mu t_a(g)(x) \\ = & \ (\lambda t_a(f) + \mu t_a(g))(x) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $t_a(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda t_a(f) + \mu t_a(g))(x)$, c'est à dire, qu'en termes de fonctions numérique,$t_a(\lambda f + \mu g) = \lambda t_a(f) + \mu t_a(g)$, ce qui montre que t_a est linéaire

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel. On appelle différence finie l'application linéaire définie dans $\mathcal{F}$ par $\Delta_a = t_a - Id$, c'est à dire :
$$\begin{cases} \Delta_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \quad f & \longmapsto & \Delta_a(f) = t_a(f) - f \end{cases}$$
C'est à dire que $\Delta_a(f)$ est la fonction $\Delta_a(f)(x) = f(x+a) - f(x)$.
La démonstration de la linéarité pourra se faire, facilement, ultérieurement.
9. La **projection** $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\begin{cases} p : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & p[(x,y)] = (x,0) \end{cases}$$

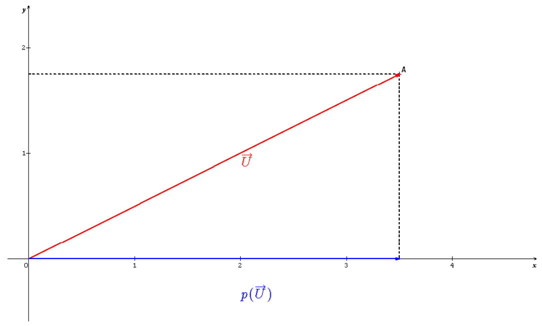

Figure 7.3 – La projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées

La projection est une application linéaire
10. La **symétrie** $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\begin{cases} s : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & s[(x,y)] = (x,-y) \end{cases}$$
La symétrie est une application linéaire

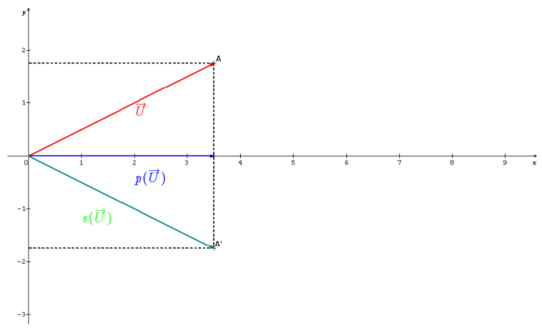

Figure 7.4 – La symétrie par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées

Nous avons : $s(u) + u = 2p(u) \Longleftrightarrow s(u) = 2p(u) - u$.

Exercice 1 :

Démontrer que la projection
$$\begin{cases} p : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & p[(x,y)] = (x,0) \end{cases}$$
est linéaire

Nous allons le démontrer en deux temps.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, Alors :

$$\begin{aligned} p\left[(x, y)+(x', y')\right] &= p\left[(x+x', y+y')\right] \\ &= (x+x', 0) \\ &= (x, 0)+(x', 0) \\ &= p\left[(x, y)\right]+p\left[(x', y')\right] \end{aligned}$$

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, Alors :

$$\begin{aligned} p\left[\lambda(x, y)\right] &= p\left[(\lambda x, \lambda y)\right] \\ &= (\lambda x, 0) \\ &= \lambda(x, 0) \\ &= \lambda p\left[(x, y)\right] \end{aligned}$$

Ce qui montre que p est bien linéaire

Exercice 2 :

Corrigé de l'exercice
Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires : on pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x, y, z) \mapsto (0, 2y - z, 0)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$
3. $\varphi_1 : E \to E$ définie par $f \mapsto 3f'' + 8f' + 5f$
4. $\varphi_2 : E \to E$ définie par $f \mapsto f'' - 2xf' + 5f$
5. $\varphi_3 : E \to E$ définie par $f \mapsto ff'$
6. $\varphi_4 : E \to E$ définie par $f \mapsto (x \mapsto f(x) - \displaystyle\int_0^x (x - t) f(t)\ dt)$.
7. $\varphi_5 : E \to E$ définie par $f \mapsto f(0) - 2f(3)$

Exercice 3 :

Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2y - z, x + z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x, y, z) \mapsto xyz$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^2 + 2x$.

Dans cet exercice, seules les deux premières applications sont linéaires. Les deux dernières ne le sont pas, du fait de la présence de carré ou de produit *(prendre des contre-exemples)*

7.1.2 Définition de forme linéaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

Exemple 2 :

1. L'application $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x, y, z) \longrightarrow f_2((x, y, z)) = x + 2y + 3z$ est une forme linéaire
2. Pour $\mathcal{C}^0([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$; alors l'application ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{C}^0([0, 1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.

3. Dans $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} ev_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & ev_a\left(f\right) = f\left(a\right) \end{array}\right.$$

Est une forme linéaire.

7.1.3 Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel . $\overrightarrow{0}_E$ est le vecteur nul de E, alors que $\overrightarrow{0}_F$ est le vecteur nul de F
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

Démonstration

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, et $u \in E$. Alors, $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = f\left(0.u\right) = 0.f\left(u\right) = \overrightarrow{0}_F$

Remarque 2 :

1. Soit $\overrightarrow{w} \in E$ tel que $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}_E$. Alors, la translation $t_{\overrightarrow{w}}$ ne peut être linéaire puisque $t_{\overrightarrow{w}}\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}_E$
2. Une autre démonstration de 7.1.3 est la suivante :
   Soit $u \in E$. Alors :
   $$f\left(u\right) = f\left(u + \overrightarrow{0}_E\right) = f\left(u\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$$
   Nous avons donc $f\left(u\right) = f\left(u\right) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$ et donc $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

7.1.4 Proposition

La composée de deux application linéaires est linéaire.

Démonstration

Soient E, F et G, 3 $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Soient $x \in E$, $y \in E$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; il faut démontrer que $g \circ f$ est linéaire.

$$\begin{aligned} g \circ f\left(ax + by\right) &= g\left[f\left(ax + by\right)\right] \text{ par définition de } \circ \\ &= g\left[af\left(x\right) + bf\left(y\right)\right] \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= ag\left[f\left(x\right)\right] + bg\left[f\left(y\right)\right] \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= ag \circ f\left(x\right) + bg \circ f\left(y\right) \end{aligned}$$

Ce que nous voulions.

7.1.5 Définition : somme d'applications linéaires.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.
On définit leur somme $f + g : E \longrightarrow F$ en posant, pour tout $u \in E$

$$\left(f + g\right)\left(u\right) = f\left(u\right) + g\left(u\right)$$

.

7.1.6 Proposition

La somme de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration

Elle est simple et utilise la linéarité de f et de g. En effet, pour $u \in E$, $v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$,

1. **Addition**

$$\begin{aligned}(f+g)(u+v) &= f(u+v)+g(u+v)\\ &= f(u)+f(v)+g(u)+g(v)\\ &= f(u)+g(u)+f(v)+g(v)\\ &= (f+g)(u)+(f+g)(v)\end{aligned}$$

2. **Multplicaton par un scalaire**

$$\begin{aligned}(f+g)(au) &= f(au)+g(au)\\ &= af(u)+ag(u)\\ &= a(f(u)+g(u))\\ &= a(f+g)(u)\end{aligned}$$

Exemple 3 :

La différence finie définie ci-dessus dans $\mathcal{F}$ par $\Delta_a = t_a - Id$ est donc linéaire comme somme de 2 applications linéaires t_a et Id

7.1.7 Définition : produit d'une application linéaire par un scalaire.

On définit le produit d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ par un scalaire $a \in \mathbb{R}$ en posant

$$(af)(u) = af(u)$$

7.1.8 Proposition

Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire .

Démonstration

Nous utilisons une nouvelle fois la linéarité de f. En effet, pour $u \in E$, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. **Addition**

$$\begin{aligned}(af)(u+v) &= af(u+v)\\ &= a[f(u)+f(v)]\\ &= af(u)+af(v)\\ &= (af)(u)+(af)(v)\end{aligned}$$

2. **Multplicaton par un scalaire**

$$\begin{aligned}(af)(\lambda u) &= af(\lambda u)\\ &= a\lambda f(u)\\ &= \lambda[af(u)]\\ &= \lambda(af)(u)\end{aligned}$$

Donc (af) est une application linéaire

Exemple 4 :

La symétrie, définie par $s(u)+u = 2p(u) \Longleftrightarrow s(u) = 2p(u)-u = (2p - \mathrm{Id}_E)(u)$ est donc une application linéaire

7.1.9 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective
Alors, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire

Démonstration

Soient $y \in F$ et $z \in F$.
Il existe alors un unique $u \in E$ tel que $f(u) = y \iff u = f^{-1}(y)$. De même, il existe alors un unique $v \in E$ tel que $f(v) = z \iff v = f^{-1}(z)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y + \mu z) = & \ f^{-1}(\lambda f(u) + \mu f(v)) \\ = & \ f^{-1}(f(\lambda u + \mu v)) \text{ par linéarité de } f \\ = & \ \lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(z) \end{aligned}$$

f^{-1} est bien linéaire

Remarque 3 :

Nous reparlerons des applications linéaires bijectives dans les isomorphismes *(cf 7.5.1)*

7.1.10 Propriété et Définition : Espaces d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F a une structure d'espace vectoriel pour les opérations de somme et de produit par un scalaire définies ci-dessus.
Cet ensemble est appelé espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

Démonstration

La démonstration de ce résultat important est très simple ; nous ne la ferons pas dans sa totatlité

1. Tout d'abord, $(\mathcal{L}(E,F), +)$ est un groupe commutatif
   (a) En premier lieu, l'addition est une opération interne, d'après 7.1.6
   (b) Ensuite l'addition est associative : $f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h$ puisque pour tout $x \in E$:
   $$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) = & \ f(x) + (g + h)(x) \\ = & \ f(x) + g(x) + h(x) \\ = & \ (f(x) + g(x)) + h(x) \\ = & \ (f + g)(x) + h(x) \\ = & \ ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$, et donc, dans $\mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h$
   (c) L'addition est clairement commutative : pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons $f + g = g + f$
   (d) L'aplication nulle $\mathcal{O}_{E,F}$ telle que, pour tout $u \in E$, $\mathcal{O}_{E,F}(u) = \overrightarrow{0}_F$ est l'élément neutre pour l'addition
   (e) Toute fonction $f \in \mathcal{L}(E,F)$ admet un élément symétrique dans $\mathcal{L}(E,F)$ qui est la fonction $-f$:
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} -f : E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & (-f)(u) = -f(u) \end{array} \right.$$
   $(\mathcal{L}(E,F), +)$ est donc bien un groupe commutatif
2. Propriétés de la multiplication par un scalaire réel
   On démontre facilement que :

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$
(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$
(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $(\lambda \times \mu) f = \lambda \times (\mu f)$
(d) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $1 \times f = f$

7.1.11 Définition d'endomorphisme

On appelle endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une application linéaire de E dans lui-même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Remarque 4 :

1. Nous avons $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$
2. D'après 7.1.10, $\mathcal{L}(E)$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
3. Soient f et g deux endomorphismes de E. En général $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égaux. Ainsi, dans $\mathcal{L}(E)$, nous n'avons pas forcément commutativité de la loi $\circ$.

Exemple 5 :

Voici des exemples illustrant la non-commutativité de la loi $\circ$

▷ $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (-y,x) \end{cases}$

▷ $\begin{cases} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (-x,y) \end{cases}$

▷ $\begin{cases} h : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = (-x,-y) \end{cases}$

Nous avons par exemple $h \circ f = f \circ h$, mais nous avons $f \circ g \neq g \circ f$. En effet,

- $h \circ f(x,y) = h(-y,x) = (y,-x)$ et $f \circ h(x,y) = f(-x,-y) = (y,-x)$
- $f \circ g(x,y) = f(-x,y) = (-y,-x)$ et $g \circ f(x,y) = g(-y,x) = (y,x)$

Nous avons, par contre, le résultat suivant :

7.1.12 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. Alors $\mathcal{L}(E)$, muni de l'addition des applications linéaires et de la composition des applications linéaires est un anneau non forcément commutatif, où la loi $\circ$ admet un élément neutre Id_E
On écrit donc que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire

Démonstration

1. D'après 7.1.10, $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe commutatif
2. L'élément neutre pour la loi de composition $\circ$ et Id_E
3. La loi $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, tout $g \in \mathcal{L}(E)$ et tout $h \in \mathcal{L}(E)$, nous avons :

$$\begin{cases} h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g \\ (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h \end{cases}$$

Nous ne démontrerons que la distributivité à gauche
Soient donc $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $h \in \mathcal{L}(E)$; soit $u \in E$; alors :

$$\begin{aligned} [h \circ (f+g)](u) &= h[(f+g)(u)] \\ &= h[f(u) + g(u)] \\ &= h[f(u)] + h[g(u)] \text{ par linéarité de } h \\ &= h \circ f(u) + h \circ g(u) \\ &= (h \circ f + h \circ g)(u) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $u \in E$, nous avons $[h \circ (f+g)](u) = (h \circ f + h \circ g)(u)$, c'est à dire que, dans $\mathcal{L}(E)$,nous avons $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$

Remarque 5 :

Nous venons de voir que $\mathcal{L}(E)$ est muni de 3 opérations :
- ▷ L'addition
- ▷ La multiplication par un scalaire
- ▷ La composition des applications

On avu qu'avec les deux premières,$\mathcal{L}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Avec ces 3 opérations, $\mathcal{L}(E)$ a **une structure d'algèbre**

Exercice 4 :

1. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E)$, nous avons :
$$\lambda (g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f)$$
2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et$g \in \mathcal{L}(E)$. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
   (a) Calculer $(af+bg) \circ (a_1 f + b_1 g)$
   (b) Appliquer le résultat trouvé à :
   i. $a = b = a_1 = b_1 = 1$ ii. $a = a_1 = 1$ et $b = b_1 = -1$ iii. $a = b = a_1 = 1$ et $b_1 = -1$

Exercice 5 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous appelons E_λ l'ensemble suivant :

$$E_\lambda = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = \lambda u\}$$

Il faut montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E

1. **Résolution de l'exercice**
   - ▷ Tout d'abord $E_\lambda \neq \emptyset$ puisque, comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_E = \lambda \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in E_\lambda$
   - ▷ Soient $u \in E_\lambda$, $v \in E_\lambda$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $au + bv \in u \in E_\lambda$
   $$f(au+bv) = f(au) + f(bv) = af(u) + bf(v) = a \times \lambda u + b \times \lambda v = \lambda (au+bv)$$
   Et donc $au + bv \in u \in E_\lambda$

   Donc E_λ est un sous-espace vectoriel de E
2. **Regardons quelques cas particuliers**
   (a) Si $\lambda = 0$, alors $E_0 = \left\{u \in E \text{ tels que } f(u) = \overrightarrow{0}\right\} = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$. On vient donc de montrer que l'ensemble des antécédents du vecteur nul forme un sous-espace vectoriel de E
   (b) Si $\lambda = 1$, alors $E_1 = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$. On vient donc de montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f *(s'ils existent !)* forme un sous-espace vectoriel de E
   (c) Si $\lambda = -1$, alors $E_{-1} = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = -u\}$. On vient donc de montrer que l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par f *(s'ils existent !)* forme un sous-espace vectoriel de E

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle $\mathrm{Com}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f

1. Démontrer que $\mathrm{Com}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$
2. Démontrer que $\mathrm{Com}(f)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$

Exercice 7 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous avons $f^n \circ g^p = g^p \circ f^n$