7.2 Applications linéaires et bases

7.2.1 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Alors :

1. **Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par la donnée de $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$**
2. **Pour toute famille $u_1, \ldots, u_n$ de n vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(e_i) = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$**

Remarque 6 :

Autrement dit :
Une aplication linéaire est donc entièrement déterminée par les images de ses vecteurs de base

Démonstration

1. Soit u un vecteur de E ; alors, il s'écrit de façon unique : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

   Alors, nous avons, nécessairement $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

   La connaissance des $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ détermine donc complètement l'application linéaire f
2. Soit $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de F, et nous définissons l'application f par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \end{array} \right.$$

   (a) Cette application est linéaire.
   En effet, soient $x \in E$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
   Alors $\lambda x + \mu y = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_1 + \mu y_i) e_i$. donc :

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_1 + \mu y_i) u_i = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i u_i\right) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

   (b) Démontrons l'unicité de cette fonction f
   Soit donc ϕ, une autre application linéaire $\Phi : E \longrightarrow F$ telle que $\Phi(e_i) = u_i$
   Démontrons que, pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = f(x)$

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = f(x)$$

   Donc $\Phi = f$ et l'unicité est démontrée.

Remarque 7 :

Notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
La donnée de n vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E quelconque équivaut donc à la donnée d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to E$ telle que $L(e_i) = u_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

Exercice 8 :

On note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Existe-t-il un endomorphisme $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

1. *Premier cas* $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$
2. *Second cas* $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$

Résolution de cet exercice

1. Soit $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$
   D'après le théorème ci-dessus, il existe bien une application linéaire $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors, $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$, et
   $$g[(x, y, z)] = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3)$$
   C'est à dire
   $$\begin{aligned} g[(x, y, z)] = &\ x(e_2 + e_3) + y(e_1) + z(e_2 - e_3) \\ = &\ ye_1 + (x + z)e_2 + (x - z)e_3 \end{aligned}$$
   Nous avons ainsi une définition analytique de g :
   $$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & x + z \\ z' = & x - z \end{cases}$$

2. Soit maintenant, $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$
   g étant linéaire, nous avons :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_3) = & e_1 \\ g(e_3) - g(e_1) = & e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_3) = & e_1 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Ces ystème est donc équivalent à :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_1) + e_2 = & e_1 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Qui conduit à :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_1) = & e_1 - e_2 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Système qui est impossible puisque nous avons $g(e_1) + g(e_2) = e_3 = e_1 - e_2$, avec les vecteurs e_3 et $e_1 - e_2$ linéairement indépendants.
   Il n'y a donc pas d'endomorphisme $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$