7.3 Noyau et image d'une application linéaire

7.3.1 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . Soit $H \subset F$ un sous-espace vectoriel de F. Alors :

$$f^{-1}(H) = \{u \in E \text{ tels que } f(u) \in H\}$$

est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Montrons tout d'abord que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$

   En effet, H étant un sous-espace vectoriel de F, nous avons $\overrightarrow{0}_F \in H$, et comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in f^{-1}(H)$ et donc $f^{-1}(H) \neq \emptyset$
2. Montrons que $f^{-1}(H)$ est stable par combinaison linéaire

   Soient $u \in f^{-1}(H)$, $v \in f^{-1}(H)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrons que $au + bv \in f^{-1}(H)$
   Par hypothèse, nous avons $f(u) \in H$ et $f(v) \in H$, et comme H est un sous-espace vectoriel de F, nous avons $af(u) + bf(v) \in H$.
   De la linéarité d ef, nous tirons $af(u) + bf(v) = f(au + bv)$, et donc $f(au + bv) \in H$, c'est à dire $au + bv \in f^{-1}(H)$

Donc, $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E

7.3.2 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
On appelle noyau de f noté $\ker f$ [1] l'ensemble des vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F c'est à dire :

$$\ker f = \left\{u \in E / f(u) = \overrightarrow{0}_F\right\} = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}\right)$$

7.3.3 Proposition

$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ce résultat peut être pris comme un cas particulier de 7.3.1 puisque $\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}$ est un sous-espace vectoriel trivial de F.
Nous allons, cependant, refaire la démonstration classique.

1. Tout d'abord, nous avons $\ker f \neq \emptyset$

   En effet, comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in \ker f$, et donc $\ker f \neq \emptyset$
2. Soient $x \in \ker f$, $y \in \ker f$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; montrons que $\lambda x + \mu y \in \ker f$

   Il faut donc calculer $f(\lambda x + \mu y)$ et montrer que $f(\lambda x + \mu y) = \overrightarrow{0}_F$
   En utilisant la linéarité de f, il n'y a rien de plus simple, car $f(x) = f(y) = \overrightarrow{0}_F$

Remarque 8 :

Dans un exercice précédent 7.1.12, nous avons démontré le théorème dans le cas particulier des endomorphismes

1. De l'allemand kern : noyau

Exemple 6 :

1. Revenons à l'exercice 7.2.1. Si $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$, alors si $g\left[(x, y, z)\right] = (x', y', z')$, nous avons :

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & x + z \\ z' = & x - z \end{cases}$$

   Rechercher le noyau de g, c'est rechercher tous les triplets (x, y, z) tels que

$$g\left[(x, y, z)\right] = (x', y', z') = (0, 0, 0)$$

   C'est à dire les triplets (x, y, z) qui vérifieront le système :

$$\begin{cases} 0 = & y \\ 0 = & x + z \\ 0 = & x - z \end{cases}$$

   Qui nous donne comme solution : $x = y = z = 0$. Donc, $\ker g = \{(0, 0, 0)\}$
2. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons l'application linéaire f suivante : $f : (x, y) \longmapsto (x + y, 2x - y)$.
   Trouver $\ker f$, c'est trouver tous les antécédents du vecteur nul $(0, 0)$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ 2x - y & = 0 \end{cases}$$

   Nous trouvons $x = y = 0$ et donc $\ker f = \{(0, 0)\}$
3. On se situe dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère $\varphi_1 : E \longrightarrow E$ définie par $f \longmapsto 3f'' + 8f' + 5f$
   φ_1 est une application linéaire . Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$3f'' + 8f' + 5f = 0$$

   C'est trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\varphi_1(f) = \mathcal{O}$; c'est rechercher le noyau de φ_1
4. Prenons l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels et considérons la relation :

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \tag{7.1}$$

   L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant (1) est le noyau $\ker(L)$ d'une application linéaire L définie par :

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

7.3.4 Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
f est injective si et seulement si $\ker f$ est réduit au vecteur nul, c'est à dire si et seulement si

$$\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$$

Démonstration

On rappelle qu'une application de A dans B **est injective** si et seulement si pour tout $x \in A$ et tout $x' \in A$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
En utilisant la contrapposée, nous avons : pour tout $x \in A$ et tout $x' \in A$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$

1. **Supposons f injective.**
   On sait déjà que $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$; soit $x \in \ker f$ alors, $f(x) = \overrightarrow{0}_F$ et donc $f(x) = f(\overrightarrow{0}_E)$ et ainsi par l'injectivité de f : $x = \overrightarrow{0}_E$
   Finalement, $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$
2. **Réciproquement, supposons que $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$.**
   Soient $u \in E$ et $u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$. Par linéarité de f on a
   $$f(u - u') = 0$$
   et donc $u - u' \in \ker f$; comme $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, nous avons $u - u' = \overrightarrow{0}_E$ et $u = u'$.
   f est donc injective

7.3.5 Corollaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire injective. Alors l'image d'une famille libre $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de E, est une famille libre de F.

Démonstration

Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille libre de E
Il faut donc montrer que la famille $\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$ est une famille libre de F.
Soient $a_1, \ldots, a_p$ p réels tels que : $a_1 f(u_1) + \ldots + a_p f(u_p) = \overrightarrow{0}_F$
f étant linéaire on a : $f(a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p) = \overrightarrow{0}_F$, ce qui veut dire que $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p \in \ker f$
Or, comme f est une application linéaire injective, $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$
Donc $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p = \overrightarrow{0}_E$, la famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ étant libre dans E, nous avons : $a_1 = \ldots = a_p = 0$
C'est donc que la famille $\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$ est une famille libre de F.
Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Cette proposition est en particulier vraie pour une base : l'image d'une base de E par une application linéaire injective forme un système libre de F *(Mais, attention, ce n'est pas forcément une base de F)*

7.3.6 Définition : Image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.
On appelle image de f notée $\mathrm{Im} f = f(E)$ l'ensembles des vecteurs de F images d'au moins un vecteur de E, c'est à dire :

$$\mathrm{Im} f = \{v \in F \text{ tels que } \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = v\}$$

7.3.7 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.
L'image par f d'un sous-espace vectoriel $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel de F notée $f(G)$.
En particulier, $\mathrm{Im} f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Comme à chaque fois, il faut démontrer deux choses : d'abord que $f(G) \neq \emptyset$, puis, si v et v' sont deux vecteurs de $f(G)$ et a et b deux réels, $av + bv' \in f(G)$

1. Démontrons que $f(G) \neq \emptyset$

   En effet, $\overrightarrow{0}_F \in f(G)$ car $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, et $\overrightarrow{0}_E \in G$ puisque G est un sous-espace vectoriel de E, donc contient, en particulier $\overrightarrow{0}_E$

2. Soient v et v' deux vecteurs de $f(G)$ image de G par l'application linéaire f.

   Soient a et b deux réels.Il faut montrer que $av + bv' \in f(G)$.
   Par définition de $f(G)$, il existe des éléments u et u' de E tels que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$.
   Donc, $av + bv' = af(u) + bf(u')$
   Par la linéarité de f, $af(u) + bf(u') = f(au + bu')$; comme G est un sous-espace vectoriel , $au + bu' \in G$, et donc $f(au + bu') \in f(G)$, et, par voie de conséquence, $av + bv' \in f(G)$

Donc, $f(G)$ est un sous-espace vectoriel d eF

7.3.8 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.

1. **Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E. alors :**

$$f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

2. **Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs générateurs de E, (par exemple une base de E) alors, $\text{Im} f$ est engendré par :$\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$, c'est à dire :**

$$\text{Im} f = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

Démonstration

1. Démontrons que $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$

   (a) Nous démontrons dans un premier temps que $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$
   Soit $v \in f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$; alors, il existe $u \in \text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$ tel que $v = f(u)$
   Le vecteur u est de la forme $u = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$ où les $a_i \in \mathbb{R}$, et donc, v s'écrit sous la forme : $v = \sum_{i=1}^{p} a_i f(u_i)$, c'est à dire que $v \in \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$.
   Nous avons donc $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$

   (b) Démontrons, maintenant, que $\text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}) \subset f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$
   Réciproquement, donc, soit $v \in \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$.
   Il existe donc $b_1, \ldots, b_p$ réels, tels que $v = \sum_{i=1}^{p} b_i f(u_i)$; de la linéarité de f, nous tirons que

$$v = f\left(\sum_{i=1}^{p} b_i u_i\right)$$

   Et, ainsi, on montre que $v \in f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$, et on a donc

$$f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \supset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

D'où nous avons bien l'égalité

$$f\left(\mathrm{Vect}\left\{u_1,\ldots,u_p\right\}\right)=\mathrm{Vect}\left(\left\{f\left(u_1\right),\ldots,f\left(u_p\right)\right\}\right)$$

2. Soit $\{u_1,\ldots,u_p\}$ une famille de vecteurs générateurs de E et $v\in \mathrm{Im}f$.
   Il faut montrer que v peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\{f(u_1),\ldots,f(u_p)\}$
   Comme $v\in \mathrm{Im}f$, il existe $x\in E$ tel que $v=f\left(x\right)$
   Comme la famille $\{u_1,\ldots,u_p\}$ est génératrice de E, x peut s'écrire : $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i$, de telle sorte que $v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f\left(u_i\right)$.
   v est bien combinaison linéaire des $\left\{f\left(u_1\right),\ldots,f\left(u_p\right)\right\}$ qui forment donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}f$

Exercice 9 :

Corrigé de l'exercice
On note $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image des vecteurs de cette base par l'applications f_1 de l'exercice 7.1.1 précédent : $f_1\left[(x,y,z)\right]=(0,2y-z,0)$; donner le noyau de f_1

Exercice 10 :

Décrire sous forme de Vect, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de l'application linéaire $f\ :\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$ définie par

$$\begin{cases} f(e_1)=(1,1,1,2,5)\\ f(e_2)=(2,1,0,3,4)\\ f(e_3)=(-1,0,-1,4,7)\\ f(e_4)=(-9,-2,1,-1,9)\end{cases}$$

(Utilisez le pivot de Gauss).

Exercice 11 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4)\}$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5, de base $\mathcal{C}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$. Construire si cela est possible des application linéaire $f\ :E\to F$ vérifiant :

1. $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(\{\varepsilon_2,\varepsilon_4\}\right)$
2. $\mathrm{Im}(f)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
3. $\mathrm{Im}(f)=F$
4. $\ker(f)=\mathrm{Vect}\left\{e_2+e_3,e_4\right\}$ et $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}\right)$.

Exercice 12 :

On note $\mathbb{R}_4\left[X\right]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.La base canonique de $\mathbb{R}_4\left[X\right]$ est donnée par $\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4\}$, où nous avons :

$$\begin{cases} e_0\left(X\right)=1\\ e_1\left(X\right)=X\\ e_2\left(X\right)=X^2\\ e_3\left(X\right)=X^3\\ e_4\left(X\right)=X^4\end{cases}$$

Soit $f\ :\mathbb{R}_4\left[X\right]\to\mathbb{R}_4\left[X\right]$ l'application linéaire définie par : $f\left(P\right)\left(X\right)=\left(X-1\right)P'\left(X\right)-P\left(X\right)$.

1. Calculer $f\left(ae_4+be_3+ce_2+de_1+ee_0\right)$

2. En déduire $\ker(f)$
3. L'équation $f(P) = Q$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout Q dans $\mathbb{R}_4[X]$?
4. calculer $f\left((x-1)^k\right)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
5. En déduire une caractérisation des polynômes Q pour lesquels l'équation $f(P) = Q$ a des solutions.
6. Résoudre $(x-1)P' - P = x^2 - 2x + 2$