7.4 Rang d'une application linéaire

7.4.1 Définition

Le rang d'une application linéaire est par définition la dimension de $\mathrm{Im} f$. On le note $\mathrm{rg}(f)$. Nous avons donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\left(\mathrm{Im} f\right)$$

Remarque 10 :

D'après la proposition 7.3.8, pour déterminer le rang d'une application linéaire il suffit donc de connaître une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ de E et de calculer le rang de la famille $\{f(e_1), \ldots, f(e_p)\}$.

Exemple 7 :

Recherche du rang d'une application linéaire
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \ldots, e_4\}$ avec e_i défini par des coordonnées toutes nulles sauf la i-ème qui vaut 1, c'est à dire :

$$\begin{cases} e_1 & = (1, 0, 0, 0) \\ e_2 & = (0, 1, 0, 0) \\ e_3 & = (0, 0, 1, 0) \\ e_4 & = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme f défini par : $f\left[(x, y, z, t)\right] = (y + z, x + z, 0, z + t)$

1. On peut remarquer que $f\left[(x, y, z, t)\right] = (y + z)\, e_1 + (x + z)\, e_2 + (z + t)\, e_4$, de telle sorte que nous nous apercevons que $\mathrm{Im} f$ est engendré par e_1, e_2 et e_4 qui sont linéairement indépendants. Le rang de f est donc de 3.
2. L'image par f des vecteurs de la base canonique est donnée par :

$$\begin{cases} f\left(e_1\right) & = (0, 1, 0, 0) = e_2 \\ f\left(e_2\right) & = (1, 0, 0, 0) = e_1 \\ f\left(e_3\right) & = (1, 1, 0, 1) = e_1 + e_2 + e_4 \\ f\left(e_4\right) & = (0, 0, 0, 1) = e_4 \end{cases}$$

Ce qui montre bien que le rang de f est 3

7.4.2 Proposition : le théorème du rang.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non. Soit $f : E \to F$ une application linéaire .
Alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie et :

$$\dim\left(\mathrm{Im}\left(f\right)\right) + \dim\left(\ker\left(f\right)\right) = \dim\left(E\right)$$

Démonstration

Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\ker(f)$ est de dimension finie et $\dim\left(\ker f\right) \leqslant \dim E$
Posons $\dim(E) = n$, et soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une base de $\ker(f)$. Cette base peut être complétée par $n - r$ vecteurs qui formeront une base de E ; soit $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ cette nouvelle base.
Montrons que $B = \{f\left(u_{r+1}\right), \ldots, f\left(u_n\right)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Comme $f\left(u_1\right) = f\left(u_2\right) = \ldots = f\left(u_r\right) = \overrightarrow{0}_F$, d'après 7.3.8, la famille B engendre forcément $\mathrm{Im}(f)$ et si nous démontrons que B est une famille libre, nous aurons terminé.

Supposons qu'il existe des coefficients $a_{r+1}, \ldots, a_n$ tels que : $a_{r+1}f(u_{r+1}) + \ldots + a_n f(u_n) = \overrightarrow{0}_F$.
Alors, de la linéarité de f, nous tirons :

$$f(a_{r+1}u_{r+1} + \ldots + a_n u_n) = \overrightarrow{0}_F$$

et donc $a_{r+1}u_{r+1} + \ldots + a_n u_n \in \ker(f)$
Ce vecteur étant dans $\ker(f)$ il peut s 'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$, c'est à dire

$$a_{r+1}u_{r+1} + \ldots + a_n u_n = a_1 u_1 + \ldots + a_r u_r$$

Or, $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ étant une base, tous les coefficients de cette égalité sont nuls *(c'est une famille libre de E).*
Finalement B est une famille libre et B est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et a $n-r$ éléments d'ou le résultat final.

7.5 Isomorphismes

7.5.1 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Un isomorphisme est une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ bijective.

Remarque 11 :

1. Que f soit bijective, veut dire que f est à la fois injective et surjective, c'est à dire si et seulement si $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ et $f(E) = F$
2. Si f est un isomorphisme, alors il existe une application linéaire $g : F \longrightarrow E$ inverse de f c'est à dire telle que :
$$g \circ f = Id_E \text{ et } fog = Id_F$$
g est l'inverse de f et est noté f^{-1}
3. On a démontré aussi en 7.1.9 que si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire bijective, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi une application linéaire bijective et donc un isomorphisme
4. Un isomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans lui-même est appelé **automorphisme** de E
5. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et est appelé **groupe linéaire** de E
6. Les isomorphismes sont toujours intéressants car l'existence d'un isomorphisme entre deux espaces assure que les mêmes propriétés (relatives à la structure considérée) sont vérifiées par ces deux espaces

7.5.2 Proposition

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme, c'est à dire :
- ▷ **Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme**
- ▷ **Si $g : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme**

Alors $gof : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme

Démonstration

On a déjà démontré que la composition de deux application linéaire est une application linéaire , et on sait que la composition de deux bijections est une bijection.
En d'autres termes, c'est fini ! !

Remarque 12 :

Le fait que $g \circ f$ soit un isomorphisme permet d'obtenir l'inverse de $g \circ f$ noté $(g \circ f)^{-1}$; nous avons : $(g \circ f)^{-1} : G \longrightarrow E$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

7.5.3 Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe non forcément commutatif
C'est à dire

1. **La composition de 2 automorphismes f et g, $f \circ g$ est un automorphisme**
2. **La loi $\circ$ est associative, c'est à dire : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$**
3. **Il existe un élément neutre pour la loi $\circ$, c'est à dire l'élément Id_E tel que**
$$f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$$
4. **Pour chaque automorphisme f, il existe un automorphisme noté f^{-1} tel que**
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

7.5.4 Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$: le groupe des homothéties

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. **Une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une application h_k définie par :**
$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_k : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & h_k(u) = ku \end{array} \right.$$
2. **On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E. Alors $\mathcal{H}$ muni de la composition des applications $\circ$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$**

Démonstration

1. Nous avons déjà vu qu'une homothétie était une application linéaire
2. Il est clair que $\mathcal{H}$ est non vide puisque $h_1 = \mathrm{Id}_E \in \mathcal{H}$
3. Une homothétie de rapport non nul est une bijection
   - ▷ Une homothétie est injective ; en effet, si $u \in \ker h_k$, alors $h_k(u) = ku = \overrightarrow{0}$; comme $k \neq 0$, nous avons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, et donc h_k est injective
   - ▷ Une homothétie est surjective ; en effet, pour tout $v \in E$, il existe $u \in E$ tel que $v = h_k(u)$; il suffit de prendre $u = \dfrac{1}{k}v$ et nous avons :
$$h_k(u) = h_k\left(\frac{1}{k}v\right) = k \times \frac{1}{k}v = v$$
   - ▷ Une homothétie est donc une bijection puisqu'elle est à la fois injective et surjective. Son application réciproque est donnée par :
$$(h_k)^{-1} = h_{\frac{1}{k}} = h_{k^{-1}}$$
4. Si je compose 2 homothéties, j'obtiens à nouveau une homothétie. En effet, soient h_{k_1} et h_{k_2} 2 homothéties de rapport non nul. Alors, pour tout $u \in E$:
$$h_{k_1} \circ h_{k_2}(u) = h_{k_1}[h_{k_2}(u)] = h_{k_1}[k_2 u] = k_1[k_2 u] = k_1 \times k_2 u = h_{k_1 \times k_2}(u)$$
Ainsi, $h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_1 \times k_2}$ et la composition de 2 homothéties est une homothétie

Remarque 13 :

Il est possible de créer un isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathcal{H}, \circ)$; il suffit de poser :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ k & \longmapsto & \varphi(k) = h_k \end{array} \right.$$

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ▷ On dit qu'un ensemble Δ est une droite vectorielle s'il admet une base formée d'un seul vecteur *(Autrement dit :* $\dim \Delta = 1$*)*.
- ▷ Un sous-espace vectoriel A de E est dit invariant par f si et seulement si $f(A) \subset a$

1. Montrer que toute homothétie vectorielle de E laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E
2. Réciproquemnt, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E qui laisse toutes les droites vectorielles de E invariantes. Soient $v \in E$ et $v' \in E$. Si Δ_v est la droite engendrée par v, Δ_v est invariante par f, et il existe donc $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v) = kv$. De même, il existe $k' \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v') = k'v'$
   (a) On suppose la famille $\{v, v'\}$ liée ; montrer que $k = k'$
   (b) On suppose la famille $\{v, v'\}$ libre ; il existe donc $k'' \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v+v') = k''(v+v')$; montrer que $k = k' = k''$
   (c) En déduire que f est une homothétie vectorielle

On vient de montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si et seulement si f laisse les droites vectorielles invariantes

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Montrer qu'une homothétie $h \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, c'est à dire que :

$$(\forall f \in \mathcal{L}(E))\,(f \circ h = h \circ f)$$

Exercice 15 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui associe à tout élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'élément $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = & y + z \\ y' = & z + x \\ z' = & x + y \end{cases}$$

1. Trouver le noyau de f ; en déduire que f est bijective
2. Montrer que la restriction de f à la droite d'équation $x = y = z$ est une homothétie
3. Montrer que la restriction de f au plan d'équation $x + y + z = 0$ est une homothétie

7.5.5 Théorème

Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Alors :
f est bijective si et seulement si $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F

Démonstration

1. On suppose f bijective
   - ▷ Si f est bijective, f est aussi surjective et donc $\mathrm{Im} f = F$ et $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de F
   - ▷ Si f est bijective, f est aussi injective et la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ étant une base de E est une famille libre et donc $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille libre

   Comme $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille libre et génératice de F, c'est une base de F
2. Réciproquement, supposons que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F
   Alors, $\dim F = \dim E$ et $\mathrm{Im} f = F$, ce qui veut dire que f est surjective.
   d'autre part, d'après le théorème du rang 7.4.2 $\dim \ker f = 0$ et donc f est injective.
   f est donc bijective, et c'est un isomorphisme.

7.5.6 Proposition

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde <u>même dimension</u> n et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. **Si f est injective, alors f est un isomorphisme.**
2. **Si f est surjective, alors f est un isomorphisme.**

<u>Démonstration</u>

1. **<u>Supposons f injective</u>**
   Alors, si f est injective, on a $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, et donc par le théorème de la dimension7.4.2 :
   $$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(F)$$
   Donc $\mathrm{Im}(f) = F$, donc f est bien surjective, donc bijective, et est finalement un isomorphisme
2. **<u>Supposons f surjective</u>**
   Alors, si f est surjective, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(F)$, donc d'après 7.4.2 $\dim(\ker(f)) = 0$, et $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, et donc f est injective,

7.5.7 Proposition : *(classification des $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie)*

1. **Deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie sont isomorphes si et seulement si il ont la même dimension.**
2. **Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.**

<u>Démonstration</u>

1. **Supposons que E et F soient isomorphes**
   Alors, il existe $f : E \longrightarrow F$ qui soit un isomorphisme
   Comme f est injective $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ et comme f est surjective $\mathrm{Im}(f) = F$.
   Le théorème de la dimension 7.4.2 donne donc
   $$\dim\ker(f) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$
   C'est à dire $\dim(E) = \dim(F)$
2. **Réciproquement, supposons** $\dim(E) = \dim(F)$
   Notons n la dimension de E et de F. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.
   Il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(e_i) = \varepsilon_i$.
   Donc $\mathrm{Im} f$ est engendrée par les vecteurs de base de F donc f est surjective c'est donc un isomorphisme de E dans F
3. Que E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n soit isomorphe à $\mathbb{R}^n$. est une conséquence immédiate des résultats précédents.

Remarque 14 :

Les propriétés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n sont donc celles de $\mathbb{R}^n$, et donc ne nécessitent pas d'étude supplémentaires.

Exercice 16 :

On note toujours $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit l'endomorphisme $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e_1 + 4e_2 - 2e_3 \\ f(e_2) = -e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

et on pose $g = f - Id_{\mathbb{R}^3}$.

1. Calculer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$.
2. Donnez le rang de f et g. *(utilisez le pivot de Gauss).*
3. Déterminer les noyaux et images de f et de g et les comparer.
4. Trouver une base $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(\varepsilon_1) = \overrightarrow{0}$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$.