7.6 Matrices et applications linéaires

Introduction

Dans cete partie E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.
On a vu qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement détreminée par l'image de ses vecteurs de base, c'est à dire totalement caractérisée par les vecteurs $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.
Ces vecteurs $f(e_j)$ sont parfaitement définis par leurs coordonnées dans la base C.
La notation de ces coordonnées nécessite un double indice : on note $a_{i,j}$ la $i$ème coordonnée dans la base C de l'image $f(e_j)$ du $j$ème vecteur de la base B.
Nous avons donc, pour tout $j = 1, \ldots, p$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\varepsilon_i$$

7.6.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E dans F telle que pour tout $j = 1, \ldots, p$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$

On appelle matrice de l'application linéaire f, relativement aux bases B et C, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M}(f)_{B,C} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & \cdots & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ \vdots & & & \cdots & & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 15 :

1. On écrit le plus souvent : $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \left((a_{i,j})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots p}}\right)$, et s'il n'y a pas d'ambiguité, $\mathcal{M}(f)$ seulement
2. La j-ième colonne de la matrice est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$
3. Lorsqu'on lit la matrice d'une application linéaire :
   - **Le nombre de colonnes** donne la dimension de l'espace de départ
   - **Le nombre de lignes** donne la dimension de l'espace d'arrivée
4. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $C = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   Considérons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ f(e_2) = -3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(e_3) = 4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \end{cases}$$

   Alors, f a pour matrice, relativement aux bases B et C :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice dépend évidemment des bases B et C ; d'où, parfois, la nécessité de préciser les bases

5. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $C = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   Considérons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :

$$\begin{cases} x' = & 3x + 4y - 5z \\ y' = & 5x + 4y \end{cases}$$

   Quelle est la matrice de f relativement aux bases canoniques ?

   Ce n'est pas très sorcier :
   - ▷ $f(e_1) = f(1,0,0) = (3,5)$
   - ▷ $f(e_2) = f(0,1,0) = (4,4)$
   - ▷ $f(e_3) = f(0,0,1) = (-5,0)$

   Donc, $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

6. La matrice d'une application linéaire dans une base B et C change lorsque l'on change l'ordre des vecteurs dans les bases B et C
   Par exemple en reprenant l'exemple précédent, si l'on prend $B' = \{e_2, e_3, e_1)\}$ et $C' = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ la matrice de l'application linéaire devient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

   Il y a une question intéressante à se poser : celle du lien entre les matrices d'une même application linéaire dans les différentes bases.

7. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$ et $f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i}$; alors, la matrice de f dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}(f)_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Soit $e_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $e_2 = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$; $\{e_1, e_2\}$ forme aussi une base de E [2], et

$$\mathcal{M}(f)_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   En effet
   - $f(e_1) = f\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) + f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} = e_1$
   - $f(e_2) = f\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) - f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{i} = -e_2$

8. Soit u un vecteur de E. u définit une application linéaire $L_u : \mathbb{R} \longrightarrow E$ telle que $L_u(1) = u$.
   La base canonique de $\mathbb{R}$ est donnée par le nombre 1, et si U est la matrice de L_u dans les bases canoniques $U = M(L_u)_{can,B}$ est la matrice formée par les coordonnées de u appelées $(u_1, \ldots, u_p)$ de u dans la base B.

9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et h_k une homothétie vectorielle de rapport k ; alors, la matrice de h_k est donnée par :

$$\mathcal{M}(h_k) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k\mathrm{I}_n$$

2. A démontrer !!

7.6.2 Théorème

Soit f une application linéaire de E vers F c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ la matrice de f dans les bases B et C ; on note : $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}\right)$.

Soit $u \in E$, un vecteur de coordonnées $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ u_p \end{pmatrix}$

Alors, les coordonnées de $v = f(u)$ sont données par $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{pmatrix}$ où $v_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} u_j$

Remarque 16 :

En fait, pour reprendre le calcul matriciel (c.f.5.2.7), nous avons :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f)_{B,C} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ u_p \end{pmatrix}$$

Démonstration

Si $u = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$, par la linéarité de f, nous avons : $f(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j f(e_j)$, c'est à dire, en lisant la matrice *(en utilisant les colonnes de la matrice)* :

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \varepsilon_i \right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} u_j a_{i,j} \varepsilon_i$$

Ce qui donne, en réorganisant les indices,

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} u_j a_{i,j} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} u_j a_{i,j} \right) \varepsilon_i$$

D'où le résultat.

Exemple 8 :

Reprenons l'exemple 4 pour lequel $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a pour matrice, relativement aux bases B et C :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Quelle est l'image du vecteur de coordonnées $(2, 3, -1)$?
Il faut donc faire le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de l'image du vecteur $(2, 3, -1)$ sont donc, après calcul : $(-9, -4)$

7.6.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients réelles. Alors
L'application

$$\begin{cases} \varphi : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ \qquad\qquad f & \longmapsto & \varphi(f) = \mathcal{M}(f)_{B,C} \end{cases}$$

est bijective

Démonstration

1. **On démontre que l'application est injective**
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, et on suppose que $\varphi(f) = \varphi(g)$, c'est à dire que f et g ont la même matrice dans les bases B et C.
   D'après la définition de la matrice d'une application linéaire, ceci veut donc dire que, pour tout $j = 1, \ldots, p$ $f(e_j) = g(e_j)$, ce qui entraîne que, pour tout $u \in E$, $f(u) = g(u)$ et donc $f = g$
2. **On démontre que l'application est surjective**
   Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $A = \left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}\right)$
   Alors, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$ a pour matrice A

Remarque 17 :

L'affirmation : ≪ **Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images de ses vecteurs de base** ≫ , prend ici, tout son sens

7.6.4 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$;on appelle rang de A la dimension de l'image de l' application linéaire associée.

Remarque 18 :

Commentaires

1. Si $A = \mathcal{M}(f)_{B,C}$, alors le rang de A est $\dim(\mathrm{Im} f)$
2. Le rang d'une matrice A est aussi le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Quel est le rang de A ?

   Appelons C_1, C_2 et C_3 les différentes colonnes de la matrice. Nous avons $C_2 = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_3)$.
   Le rang de la matrice A n'est sûrement pas 3 ! !
   On vérifie facilement que si nous extrayons de cette matrice 2 colonnes, ces 2 colonnes sont linéairement indépendantes. Le rang de la matrice A est donc 2