7.7 Opérations sur les matrices, opérations sur les applications linéaires

7.7.1 Matrice de la somme

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F de matrices respectives $\mathcal{M}(f)$ et $\mathcal{M}(g)$ dans les mêmes bases B et C.
La matrice de l'application linéaire $f+g$ est la matrice $\mathcal{M}(f+g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$, c'est à dire, en revenant aux notations de 7.6.3,

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Démonstration

Pour tout vecteur $u \in E$, $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.
En particulier pour les vecteurs de base, nous avons : $(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j)$
Si $\mathcal{M}(f) = \left((\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right)$ et $\mathcal{M}(g) = \left((\beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right)$

$$(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij})\,\varepsilon_i$$

Et donc $\mathcal{M}(f+g)_{B,C} = \left((\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$

7.7.2 Produit par un scalaire.

La matrice de l'application linéaire λf est $\lambda\mathcal{M}(f)$.
$\lambda\mathcal{M}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont celles de $\mathcal{M}(f)$ multipliées par λ, et, en revenant à 7.6.3,

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$$

Démonstration

La démonstration est évidente, car : $(\lambda f)(e_j) = \lambda f(e_j) = f(\lambda e_j)$.

7.7.3 Proposition

Nous savons que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension np.
De même,$\mathcal{L}(E,F)$, ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Alors, l'application $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration

Cet énoncé peut constituer une synthèse de ce qui a été vu ci-dessus.
Qui dit « isomorphisme d'espaces vectoriels », dit application linéaire bijective.

- **La linéarité est évidente** car nous avons montré en 7.7.1 que pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E,F)$,
$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
et nous venons de montrer en 7.7.2 que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$,
$$\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$$
- Pour démontrer que c'est une bijection Il suffit de revenir à 7.6.3

Remarque 19 :

La précédente proposition montre que l'espace d'applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie np

Exemple 9 :

Soient E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsmuni de leur base canonique respective. On suppose que $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ 2 application linéaire de matrice respective dans les bases canoniques :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix}$$

Alors :

1. La matrice de $f + g$ est donnée par : $\mathcal{M}(f+g) = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 & c+c_1 \\ d+d_1 & e+e_1 & f+f_1 \end{pmatrix}$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice de λf est donnée par : $\mathcal{M}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}(f) \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$

7.8 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Problème posé

Soient E, F et G, 3 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie. On suppose :
— E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m et de base $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$
— F $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et de base $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$
— G $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et de base $D = \{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$,

On considère les application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On considère les matrices de f et g notée, dans les différentes bases par : $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \left((r_{j,k})_{\substack{i=1,..,n \\ k=1,..,m}} \right)$ et $\mathcal{M}(g)_{C,D} = \left((s_{i,j})_{\substack{i=1,..,p \\ j=1,..,n}} \right)$

Nous avons $g \circ f$ qui est une application linéaire de E dans G, qui admet donc une matrice à p lignes et m colonnes $\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D} = \left((t_{ik})_{\substack{i=1,..,p \\ k=1,..,m}} \right)$

La question que nous nous posons est celle du lien entre $\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D}$, $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ et $\mathcal{M}(g)_{C,D}$.

7.8.1 Théorème

La matrice de $g \circ f$ est le produit de la matrice de g par la matrice de f,c'est à dire :

$$\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D} = \mathcal{M}(g)_{C,D} \times \mathcal{M}(f)_{B,C}$$

Démonstration

Le problème consiste donc à connaître la j-ème colonne de la matrice de $g \circ f$, c'est à dire qu'il faut connaître les coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans la base $D = \{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$

$$\begin{aligned}
g \circ f(e_j) = \;& g[f(e_j)] \\
= \;& g\left[\sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\varepsilon_i\right] \text{ par définition de la matrice } \mathcal{M}(g)_{C,D} \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} r_{i,j} g(\varepsilon_i) \text{ par linéarité de } g \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\left[\sum_{k}^{p} s_{k,i}\eta_k\right] \text{ par définition de la matrice } \mathcal{M}(f)_{B,C} \\
= \;& \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k}^{p} r_{i,j}s_{k,i}\eta_k\right) \\
= \;& \sum_{k}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{k,i}r_{i,j}\right)\eta_k \text{ en permutant les signes } \sum
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le terme de la ligne k de la colonne j est donné par : $\sum_{i=1}^{n} s_{k,i}r_{i,j}$ qui est le terme de la igne k et de la colonne j du produit matriciel $\mathcal{M}(g)_{C,D} \times \mathcal{M}(f)_{B,C}$

Remarque 20 :

1. Il faut donc faire très attention au sens!!
2. On comprend mieux la cohérence due aux dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsqui montre que la multiplication ne peut pas, sauf exception, être comutative : le produit de $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ par $\mathcal{M}(g)_{C,D}$ ainsi défini, impose que le nombre de colonnes de $\mathcal{M}(g)_{C,D}$ est égal au nombre de lignes de $\mathcal{M}(f)_{B,C}$

3. En reprenant l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \varphi(f) = \mathcal{M}(f)_{B,C} \end{array} \right.$$

nous avons $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \times \varphi(g)$, ce qui montre que φ est un homomorphisme d'anneau

7.8.2 Propriété

On appelle I_n la matrice identité d'ordre n

1. **Pour toute matrice ayant n colonnes on a $M\mathrm{I}_n = M$**
2. **Pour toute matrice ayant n lignes on a $\mathrm{I}_n M = M$**

Démonstration

Ce résultat est intéressant ; il lie théorie ensembliste et calcul matriciel.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; nous avons $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.
   Comme $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_E) = I_n$,et si $M = \mathcal{M}(f)$, M a donc n colonnes, en utilisant l'isomorphisme défini en 7.6.3, nous avons le résultat,
2. De même si cette fois ci, f va de F dans E,et si $M = \mathcal{M}(f)$, M a cette fois ci n lignes, et, toujours en utilisant 7.6.3, nous avons le résultat.

7.8.3 Similitude des propriétés entre application linéaire et matrices

1. **Quand les produits ont un sens, pour toutes matrices A, B, C on a $(AB)C = A(BC)$**
2. **Quand les produits ont un sens on a :**

$$\begin{array}{l} A.(B+C) = AB + AC \\ (B+C).A = BA + CA \\ A.(aB) = aAB \text{ avec } a \in \mathbb{R} \end{array}$$

Démonstration

Ces propriétés se déduisent immédiatement des relations correspondantes pour les application linéaire , par l'isomorphisme d'anneau φ entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

7.8.4 Matrice de l'application linéaire inverse

Soit $f : E \longrightarrow E$ un automorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, c'est à dire $f \in \mathrm{GL}(E)$ et B une base de E. Alors,

$$\mathcal{M}\left(f^{-1}\right)_B = \left((\mathcal{M}(f))_B\right)^{-1}$$

Démonstration

En effet $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
En reprenant 7.6.3, nous avons

$$\varphi\left(f \circ f^{-1}\right) = \varphi\left(f^{-1} \circ f\right) = \mathrm{I}_n$$

Comme φ est un homomorphisme d'anneau,nous avons $\varphi\left(f \circ f^{-1}\right) = \varphi(f) \times \varphi\left(f^{-1}\right) = \mathrm{I}_n$; ce qui termine de montrer que $\varphi\left(f^{-1}\right) = \varphi(f)^{-1}$.
Ce que nous voulions

Remarque 21 :

1. **Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.**
   En effet si on considère l'application linéaire f associée à une matrice carrée d'ordre n A, il est nécessaire et suffisant que f soit bijective, c'est à dire que f soit injective ou surjective, c'est à dire encore que le noyau de f soit réduit au vecteur nul ou que son image soit $\mathbb{R}^n$, ou autrement dit que le rang de f que l'on soit n
2. Le résultat, montré pour $\varphi : \varphi\left(f^{-1}\right) = \varphi\left(f\right)^{-1}$ est vrai pour tous les homomorphismes d'anneaux, pourvu que f soit inversible.

Exercice 17 :

Dans le cas d'une matrice diagonale, c'est à dire d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, avec $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$, donnez une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et en calculer l'inverse.