7.9 Changement de base.

On sait que la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dépend des bases choisies ; la question que nous pouvons nous poser est celle du lien entre ces matrices d'une même application linéaire exprimées dans des bases différentes
Nous allons commencer par un exemple

7.9.1 Etude d'un exemple

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0 = \{i,j\}$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ telle que :

$$\begin{cases} f(i) = & j \\ f(j) = & i \end{cases}$$

La matrice de f, dans la base B_0 est donc $\mathcal{M}(f)_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère une autre base de $\mathbb{R}^2$, la base $B_1 = \{u,v\}$ où $u = i+j$ et $v = i-j$. Il est facile de vérifier que c'est bien une base.

Nous avons

- $f(u) = f(i+j) = f(i) + f(j) = j + i = u$
- $f(v) = f(i-j) = f(i) - f(j) = j - i = -v$

D'où la matrice de f dans B_1 est $\mathcal{M}(f)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **On cherche donc le lien entre $\mathcal{M}(f)_{B_0}$ et $\mathcal{M}(f)_{B_1}$**

1. Dans un premier temps, nous considérons l'application identique dans $\mathbb{R}^2$, pour lequel on « dédouble »$\mathbb{R}^2$, en le considérant sous 2 bases différentes : d'une part $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ et d'autre part $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire :
$$\begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, B_1\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^2, B_0\right) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) = u \\ v & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) = v \end{cases}$$
On appelle P la matrice de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ de $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ dans $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire que $P = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2};\right)_{B_1 \to B_0}$
Les colonnes de P sont donc constituées des coordonnées de u et v dans la base B_0, c'est à dire qu'il faut exprimer u et v en fonction de i et j, ce qui nous est donné par l'énoncé :
Nous avons donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. Dans un second temps, on considère la même application identique dans $\mathbb{R}^2$, pour lequel on « dédouble » toujours $\mathbb{R}^2$, en le considérant sous 2 bases différentes : $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ et $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire :
$$\begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, B_0\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^2, B_1\right) \\ i & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(i) = i \\ j & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(j) = j \end{cases}$$
De même, nous appelons Q la matrice de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ de $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$ dans $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$, c'est à dire que $Q = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2};\right)_{B_0 \to B_1}$; les colonnes de Q sont donc constituées des coordonnées de i et j dans la base B_1, c'est à dire qu'il faut exprimer i et j en fonction de u et v ; un rapide calcul nous montre que :
$$\begin{cases} u = & i+j \\ v = & i-j \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} i = & \frac{1}{2}(u+v) \\ j = & \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$
Nous avons donc : $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$
3. On peut remarquer que $Q = P^{-1}$, mais est-ce surprenant ? ?

Utilité de P et de P^{-1}

Soit $X \in \mathbb{R}^2$; alors, dans la base canonique B_0, si $X = (x, y)$, nous avons $X = xi + yj$, et dans la base B_1, nous avons $X = au + bv$, et comme c'est le même vecteur, nous avons : $xi + yj = au + bv$, c'est à dire, en remplaçant, u et v par leur expression en fonction de i et j, nous avons :

$$X = xi + yj = a\,(i + j) + b\,(i - j) = (a + b)\,i + (a - b)\,j$$

En vertu de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + b \\ y = a - b \end{array}\right.$$

Nous avons donc, <u>matriciellement</u> :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_1 \to B_0} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

C'est à dire que, connaissant les coordonnées $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de X dans la base B_1, il est donc possible de connaître les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du même vecteur X dans la base B_0, uniquement grâce au calcul matriciel.
De la même manière, nous aurions

$$\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_0 \to B_1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lien entre $\mathcal{M}(f)_{B_0}$ et $\mathcal{M}(f)_{B_1}$

Nous connaissons $\mathcal{M}(f)_{B_0}$, et nous souhaitons connaître $\mathcal{M}(f)_{B_1}$.
Or, $\mathcal{M}(f)_{B_1}$ est la matrice de l'application $f_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \longrightarrow \{\mathbb{R}^2, B_1\}}$
Or,

$$f_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \to \{\mathbb{R}^2, B_1\}} = \mathrm{Id}_{\{\mathbb{R}^2, B_0\} \to \{\mathbb{R}^2, B_1\}} \circ f_{\{\mathbb{R}^2, B_0\} \to \{\mathbb{R}^2, B_0\}} \circ \mathrm{Id}_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \to \{\mathbb{R}^2, B_0\}}$$

En schématisant :

$$\left\{\mathbb{R}^2, B_1\right\} \quad \overset{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}}{\longrightarrow} \quad \left\{\mathbb{R}^2, B_0\right\} \quad \overset{f}{\longrightarrow} \quad \left\{\mathbb{R}^2, B_0\right\} \quad \overset{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}}{\longrightarrow} \quad \left\{\mathbb{R}^2, B_1\right\}$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\mathcal{M}(f)_{B_1} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_0 \to B_1} \times \mathcal{M}(f)_{B_0} \times \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_1 \to B_0}$$

Autrement dit :

$$\mathcal{M}(f)_{B_1} = P^{-1} \times \mathcal{M}(f)_{B_0} \times P$$

Ce qui, tous calculs faits donne $\mathcal{M}(f)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Ce que nous savions déjà ! !

7.9.2 Généralisation

7.9.3 Position du problème

Nous nous plaçons maintenant dans $\mathbb{R}^n$. Soit un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, dont les coordonnées dans la base canonique $can = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sont $(u_1, \ldots, u_n)$, c'est à dire que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

On se donne une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$ et on cherche à calculer les coordonnées de u dans cette nouvelle base.
On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de u dans cette nouvelle base.

Nouvelle base, nouvelles coordonnées

Par définition des coordonnées de u dans la base B, nous avons :

$$u = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n$$

Nous notons v_{ij} la $j - ieme$ coordonnée du vecteur V_i dans la base canonique can, c'est à dire :

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$$

On obtient :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j \right)$$

C'est à dire, en permutant les signes somme :

$$u = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ij} \right) e_j$$

De l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous obtenons :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ij}$$

On a donc obtenu les coordonnées de u dans la base canonique en fonction de celles de u dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.
De plus en remarquant qu'en posant P la matrice dont la $i_e me$ colonne sont les coordonnées de V_i dans la base canonique can, cad :

$$P = \left((v_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \right)$$

On obtient la formule de changement de base :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \\ & & \ddots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage de $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$ vers la base canonique can qui donne les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique, connaissant les coordonnées de ce vecteur dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.
Et si vous admettez que P est bien inversible, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Vous admettrez aussi que P^{-1} est en fait la matrice dont la $i-eme$ colonne est formée par les coordonnées de e_i dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$, et c'est la matrice de passage de la base canonique can vers la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.

Remarque 22 :

Si la matrice A d'un endomorphisme f vous est donnée dans une base B, que vous notez P la matrice de passage de la base B' dans la base B, et A' la matrice de f dans la base B' on a la formule :
$A = PA'P^{-1}$ ou bien : $A' = P^{-1}AP$.

7.9.4 Définition

On dit que les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exercice 18 :

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la relation suivante :

$$A\mathcal{R}A' \Longleftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que } A = P^{-1}A'P$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.