7.10 Matrices et applications linéaires : exercices

7.10.1 Applications linéaires et matrices

Exercice 19 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{C} = \left\{\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}\right\}$
f et g étant deux applications linéaires de E dans F de matrices respectives :

$$\mathcal{M}(f)\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g)\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Définir analytiquement les applications suivantes :

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $2f - 3g$
4. $-f + 2g$
5. $5f - g$
6. $af + bg$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 5z \\ y' = -x + 2z \end{cases}$
Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$

Exercice 21 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Pour chacune des matrices ci-dessus, donner les caractéristiques de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associée : images des vecteurs de la base canonique, image d'un vecteur quelconque *(définition analytique).*
2. Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui les calculer de deux façons pour revérifier l'associativité du produit de matrices.

Exercice 22 :

Déterminer, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application linéaire T, qui aux vecteurs $u = (1, -1)$ et $v = (2, -3)$, fait correspondre $T(u) = (-1, -2, 5)$ et $T(v) = (0, 5, 4)$

Exercice 23 :

Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, on considère les matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2}}$ forme une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$
2. Plus généralement, chercher une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Exercice 24 :

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. On désigne par E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Soit $u \in E$ de coordonnées (x, y, z)

1. Démontrer que tout $f \in E^*$ est de la forme :
$$f(u) = ax + by + cz \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$
2. Pour $f \in E^*$, démontrer que $\dim \ker f \geqslant 2$
3. Trouver une base de E^* et en déduire la dimension

Exercice 25 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Trouver une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = 2$ et $f\left(\overrightarrow{j}\right) = -1$
   Déterminer le noyau et l'image de f
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Trouver une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = 2$, $f\left(\overrightarrow{j}\right) = -1$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = 1$
   Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 26 :

Soit $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, et U, l'application linéaire qui à (x, y, z) fait correspondre $(y + z, z + x, x + y)$. Ecrire la matrice de U, et vérifier que U est un isomorphisme.

Exercice 27 :

$\mathbb{R}_4[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur ou égal à 4 ; Soit $\varphi : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ définie par $\varphi(P) = P'$. Donner la matrice A de φ dans la base $\left\{1, X, \dfrac{X^2}{2!}, \dfrac{X^3}{3!}, \dfrac{X^4}{4!}\right\}$; Calculer A^5

Exercice 28 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 29 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et une base de chacun de ces sous espaces vectoriels

Exercice 30 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
Déterminer le noyau et l'image de f . En déduire l'existence d'une infinité de bases dans lesquelles la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 31 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Donnez le rang de f, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}f$
2. Quelle est la dimension du noyau de f, et en donner une base

Exercice 32 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f et g 2 endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$

1. Démontrer que $g(\ker f) \subset \ker f$ et que $g(\mathrm{Im}f) \subset \mathrm{Im}f$
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$; f et g 2 endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ de matrices respectives :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $f \circ g = g \circ f$ et vérifier les résultats de la question précédente

Exercice 33 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$

1. Démontrer que $\ker f \cap \mathrm{Im}f = f\left(\ker f^2\right)$
2. Dans cette question, on suppose $\dim E = 2$. vérifier la question précédente dans les cas où la matrice de f est donnée par :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -12 & --18 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser , relativement à la base canonique, les matrices des endomorphismes ayant pour image le plan $x + y + z = 0$, et pour noyau la droite $x = y = z$

Exercice 35 :

1. **Endomorphisme nilpotent : étude d'un cas particulier**
   On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. On construit une application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = e_2 + e_3 \\ f(e_2) & = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) & = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2) \end{cases}$$

   (a) On appelle A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$; déterminer A
   (b) Pour $u = (x, y, z)$, donner les coordonnées (x', y', z') de $f(u)$ en fonction de celles de u
   (c) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
   (d) Déterminer l'image de f et en donner une base.
   (e) Calculez A^3
2. **Endomorphisme nilpotent : cas général**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
   Un endomorphisme u est dit nilpotent d'indice $k (k \in \mathbb{N}^*)$ si et seulement si $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$

(a) Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent d'indice k, et x un vecteur tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$, alors les vecteurs $\left\{x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\right\}$ sont linéairement indépendants ; en déduire que l'indice d'un endomorphisme nilpotent est au plus égal à n .

(b) Montrer que, par rapport à une base convenablement choisie de E, la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'indice n est

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer la matrice inverse de $Id - U$

Exercice 36 :

Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On considère les matrices :

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous notons $\mathcal{M}'$ l'ensemble

$$\mathcal{M}' = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$$

1. Démontrer que $\mathcal{M}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}'$ dont on donnera une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}'$, avec $A = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2}$ calculer A^n
3. On considère la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Calculer x_n et y_n en fonction de n

(b) On suppose donc $A = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2}$ et $|\alpha| < 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

7.10.2 Isomorphismes d'espaces vectoriels

Exercice 37 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = \{u, v\}$. A tout $m \in \mathbb{R}$, nous associons un endomorphisme $f_m \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\begin{cases} f_m(u) = & (1+m)u - v \\ f_m(v) = & 3u + (1-m)v \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les endomorphismes f_m ne sont-ils pas bijectifs ?
2. Déterminer, pour chacune des applications linéaires correspondant à ces valeurs, le noyau et l'image de f_m

Exercice 38 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On note Id_E l'endomorphisme identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f \circ f = \mathcal{O}_E$

   (a) Démontrer que les endomorphismes $\mathrm{Id}_E - f$ et $\mathrm{Id}_E + f$ sont bijectifs

   (b) Exprimer $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ et $(\mathrm{Id}_E + f)^{-1}$
2. **Application**

   L'objet de cette question est de vérifier le résultat précédent dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2 muni d'une base $\{i, j\}$ et d'une application linéaire de E dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est donnée successivement par :

(a) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 39 :

Soit E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f un <u>isomorphisme</u> de E sur F

1. $\overrightarrow{D}$ est une droite de E ; démontrer que $f\left(\overrightarrow{D}\right)$ est une droite de F
2. $\overrightarrow{P}$ est un plan de E ; démontrer que $f\left(\overrightarrow{P}\right)$ est un plan de F

Exercice 40 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$. A tout $m \in \mathbb{R}$, nous associons un endomorphisme $f_m \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice est donnée par :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les nombres $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels f_m est un automorphisme de E
2. Déterminer le noyau et l'image de f_m lorsque f_m n'est pas une bijection

Exercice 41 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On note Id_E l'endomorphisme identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \neq \mathcal{O}_E$ et $f^2 = f \circ f = \mathcal{O}_E$.
A tout nombre réel $m \in \mathbb{R}$, on associe l'endomorphisme $f_m = \mathrm{Id}_E + mf$, et on désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble des endomorphismes f_m ainsi obtenus

1. $\mathcal{G}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$
2. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{R}$, $f_m \circ f_n = f_{m+n}$
3. Démontrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}(E)$

Exercice 42 :

$\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on peut associer $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé de P.

1. $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ étant 2 nombres réels, démontrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :
$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R}_2[X] \\ \qquad\quad P & \longmapsto \quad f(P) = P + (mX + p)P' \end{cases}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Pour quelles valeurs de m et p, f n'est-elle pas un automorphisme ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas un automorphisme

Exercice 43 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 *(c'est donc un plan vectoriel)* rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j\}$. On considère les 6 endomorphismes de E, Id_E, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 dont les matrices dans la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ sont :

1. $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{M}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{M}(f_2) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{M}(f_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. $\mathcal{M}(f_4) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

6. $\mathcal{M}(f_5) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Démontrer que $\{\mathrm{Id}_E, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. En donner la table de composition ; est-ce un sous-groupe commutatif ?

Exercice 44 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; nous avons déjà démontré qu'une homothétie vectorielle de E commutait avec tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Nous allons en étudier la réciproque dans un espace de dimension 2.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j\}$. Soit Φ un endomorphisme de E, c'est à dire $\Phi \in \mathcal{L}(E)$, qui commute avec tout endomorphisme de E, c'est à dire :

$$(\forall f \in \mathcal{L}(E))\,(f \circ \Phi = \Phi \circ f)$$

En utilisant le calcul matriciel, démontrer que Φ est une homothétie de E

Exercice 45 :

$\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on peut associer $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé de P et $P'' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé seconde de P

Pour $m \in \mathbb{R}$ on considère l'application $f_m : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \qquad P & \longmapsto & f(P) = X^2P'' + (X+3)P' + mP \end{cases}$$

1. Démontrer que f_m est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Donner la matrice de f_m dans la base $\{1, X, X^2\}$ qui est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Pour quelles valeurs de m f_m n'est pas un automorphisme ?
4. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f_m n'est pas un automorphisme
5. On suppose $m = -1$. Déterminer les nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, pour lesquels il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = \lambda P$

7.10.3 Matrices et changement de base

Exercice 46 :

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport aux bases (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) de $\mathbb{R}^2$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. On prend, dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base : $\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$

   Ecrire la matrice de T quand on rapporte $\mathbb{R}^3$ à cette nouvelle base
2. On prend, dans $\mathbb{R}^2$ la nouvelle base : $\begin{cases} f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \end{cases}$

   Ecrire la matrice de T par rapport aux bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2)

Exercice 47 :

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les vecteurs $e = (3, 5)$ et $f = (4, 7)$. Ecrire la matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à la base (e, f) ; en déduire les composantes de $v = (11, 13)$ dans la base (e, f)

Exercice 48 :

Soit $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans cette base.
Soient $e = (5, 7)$ et $f = (3, 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de φ dans la base (e, f) ?

Exercice 49 :

Soit $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} f(i) = 3i + 4j - 2k \\ f(j) = -i - j + k \\ f(k) = i + 2j \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A de f
2. Montrer que le noyau $\ker f$ de f est de dimension 1 .
3. Déterminer un vecteur qui engendre $\ker f$; quelle est la dimension de Imf
4. Calculer A^2, et montrer que pour tout vecteur $v \in Imf$, on a $f(v) = v$
5. Soit $H = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = v\right\}$; monter que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner sa dimension, et en déduire que $\mathrm{Im} f = H$
6. Donner une base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de R^3 telle que $\varepsilon_1 \in \ker f$, et ε_2 et ε_3 dans Imf. Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 50 :

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier qu'il existe un seul $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ne soit pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer λ et une base de $\ker v$
2. Montrer que $v^2 = 0$; montrer que $\{i, v(i), k\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 51 :

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée can et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de matrice dans la base canonique can :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les vecteurs $u = (2, -1, -2)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (-2, 1, 3)$ forment une base B de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les matrices de passage $P = \mathcal{M}(\mathrm{Id})_{(B,can)}$ et $Q = \mathcal{M}(\mathrm{Id})_{(can,B)}$.
3. Calculer la matrice de f dans la base B.

Exercice 52 :

$\mathbb{R}_4\left[X\right]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur ou égal à 4 et on note $D\ : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par $D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\left\{1, X, X^2, X^3, X^4\right\}$.
2. Déterminer la matrice A' de D dans la base $\{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$
3. Déterminer les matrices de passage entre ces deux bases de $\mathbb{R}^4[X]$.
4. Quelle relation existe t-il entre les matrices A et A' ?

Exercice 53 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on appelle $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique.
On considère la base $\mathcal{B}_1 = \{u, v, w\}$ où nous avons défini les vecteurs u, v, et w par :

$$\left\{\begin{array}{rl} u = & e_1 + e_2 + e_3 \\ v = & e_2 \\ w = & e_3 \end{array}\right.$$

1. Ecrire P, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$, et Q, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_0$
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}\left(f\right)_{\mathcal{B}_0} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Donnez $\mathcal{M}\left(f\right)_{\mathcal{B}_1}$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$