7.11 Projections et symétries

7.11.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = u_F + u_G \textbf{ où } u_F \in F \textbf{ et } u_G \in G$$

On appelle projection de E sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$\begin{cases} p : E & \longrightarrow & E \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & p(u) = u_F \end{cases}$$

Remarque 23 :

1. p est aussi appelé **projecteur** et G est aussi appelé la **direction** de la projection
2. Représentation d'une projection dans la figure 7.5

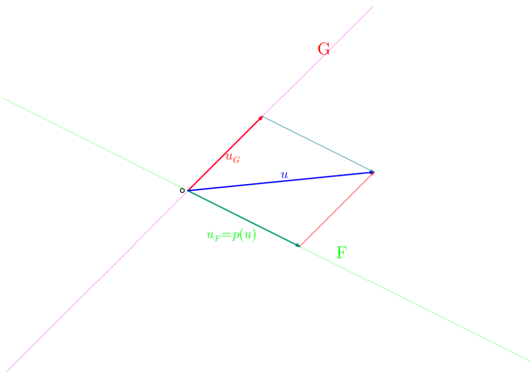

FIGURE 7.5 – Une visualisation de la projection vectorielle

7.11.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors :

1. **p est un endomorphisme de E, c'est à dire que $p \in \mathcal{L}(E)$**
2. **p est tel que $p \circ p = p^2 = p$**
3. $\ker p = G$
4. $\mathrm{Im} p = F$
5. **L'ensemble des vecteurs invariants par p est F**

Démonstration

1. p est une application linéaire
   Soient $u \in E$ et $v \in E$; soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$
   - ▷ Alors $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$ et donc $p(u) = u_F$ et $p(v) = v_F$
   - ▷ De plus, $\alpha u = \alpha u_F + \alpha u_G$ et $\beta v = \beta v_F + \beta v_G$ de telle sorte que $p(\alpha u) = \alpha u_F = \alpha p(u)$ tout comme $p(\beta v) = \beta v_F = \beta p(v)$

- ▷ Donc comme $\alpha u+\beta v=\alpha u_F+\alpha u_G+\beta v_F+\beta v_G=\alpha u_F+\beta v_F+\alpha u_G+\beta v_G$
  De la structure de sous-espace vectoriel de F et G, nous avons $\alpha u_F+\beta v_F\in F$ et $\alpha u_G+\beta v_G\in G$ et donc :
  $$p(\alpha u+\beta v)=\alpha u_F+\beta v_F=\alpha p(u)+\beta p(v)$$

p est donc une application linéaire

2. <u>p est tel que $p\circ p=p^2=p$</u>

   Soit $u\in F$; alors $u=u_F+u_G$ et $p(u)=u_F=u_F+\overrightarrow{0}_G$.
   Donc $p^2(u)=p(p(u))=p(u_F)=u_F=p(u)$
   Ainsi, $p\circ p=p^2=p$

3. <u>Nous avons $\ker p=G$</u>

   - ▷ Tout d'abord, il est évident que $G\subset\ker p$ puisque si $v\in G$, alors $v=\overrightarrow{0}_F+v$ et donc $p(v)=\overrightarrow{0}$; ainsi, $v\in\ker p$
   - ▷ Réciproquement, soit $x\in\ker p$. Alors, comme $x=x_F+x_G=p(x)+x_g=x_g$, ce qui veut dire que $x\in G$ et donc, $\ker p\subset G$

   Donc $\ker p=G$

4. <u>Nous avons $\mathrm{Im}p=F$</u>

   - ▷ Soit $u\in E$, alors $u=u_F+u_G$ et $p(u)=u_F$, donc $p(u)\in F$, ce qui veut dire que $\mathrm{Im}p\subset F$
   - ▷ Soit $x\in F$; alors, x est l'image de tout vecteur $u\in E$, s'écrivant $u=x+u_G$ où $u_G\in G$ est un vecteur quelconque de G ; et nous avons $p(u)=x$ et donc $x\in\mathrm{Im}p$ et donc $F\subset\mathrm{Im}p$

5. <u>L'ensemble des vecteurs invariants par p est F</u>

   Soit $u\in E$ un vecteur invariant par p, c'est à dire que $p(u)=u$
   Comme $u=u_F+u_G$, que $p(u)=u_F=u$, alors $u\in F$; donc l'ensemble des vecteurs invariants est inclus dans F.
   Réciproquement, si $x\in F$, alors $x=x+\overrightarrow{0}$ et $p(x)=x$ et donc, F est inclus dans l'ensemble des vecteurs invariants.
   D'où l'ensemble des vecteurs invariants par p est F

7.11.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle <u>projecteur</u> tout endomorphisme $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que $p^2=p$
Un projecteur de E est une projection de E sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\ker p$

<u>Démonstration</u>

Soit $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que $p^2=p$

1. <u>Tout d'abord, $E=\mathrm{Im}p+\ker p$</u>
   En effet, soit $u\in E$; alors, $u=p(u)+(u-p(u))$.
   Nous avons, bien entendu, $p(u)\in\mathrm{Im}p$. Démontrons que $u-p(u)\in\ker p$
   $p(u-p(u))=p(u)-p^2(u)$; comme $p^2=p$, nous avons :
   $$p(u-p(u))=p(u)-p^2(u)=p(u)-p(u)=\overrightarrow{0}$$
   Ainsi, $u-p(u)\in\ker p$.
   Ainsi, tout $u\in E$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}p$ et d'un vecteur de $\ker p$; donc $E=\mathrm{Im}p+\ker p$

2. <u>Montrons maintenant que $\mathrm{Im}p\cap\ker p=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$</u>

   Si nous montrons que $\mathrm{Im}p\cap\ker p=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, nous aurons aussi démontré l'unicité de la décomposition d'un vecteur $u\in E$ comme somme d'un vecteur de $\mathrm{Im}p$ et d'un vecteur de $\ker p$; nous aurons donc $E=\mathrm{Im}p\oplus\ker p$
   Soit donc $v\in\mathrm{Im}p\cap\ker p$

Alors, puisque $v \in \mathrm{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) = v$. De même, comme $v \in \ker p$, $p(v) = \overrightarrow{0}$. Comme $p^2 = p$, nous avons :

$$v = p(x) = p^2(x) = p(p(x)) = p(v) = \overrightarrow{0}$$

D'où $\mathrm{Im} p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$

3. Comme tout $u \in E$ peut s'écrire de manière unique $u = p(u) + (u - p(u))$, p est une projection de E sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$

Exercice 54 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\{i, j, k\}$. On considère l'application linéaire de E dans E de matrice :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que f est une projection vectorielle*
2. *Trouver les 2 sous-espace vectoriels qui la caractérisent*

Corrigé de l'exercice

1. Montrer que f est une projection vectorielle
   Il suffit d'utiliser le calcul matriciel et de montrer que $\mathcal{M}(f) \times \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(f)$
2. Trouver les 2 sous-espace vectoriels qui la caractérisent
   (a) **Recherche du noyau** $\ker f$
   La définition analytique de f est donnée par le calcul matriciel. Si $u \in E$ a pour coordonnées (x, y, z) et celles de $f(u)$,(x', y', z'), nous avons :

$$\begin{cases} x' = & \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y' = & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

   Et $u \in \ker f \iff f(u) = \overrightarrow{0}$ et nous avons le système :

$$\begin{cases} \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z = & 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = & 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x - y - z = & 0 \\ -x + 2y - z = & 0 \\ -x - y + z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x - y - (x + y) = & 0 \\ -x + 2y - (x + y) = & 0 \\ z = & x + y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = & 0 \\ -2x + y = & 0 \\ z = & x + y \end{cases}$$

   $\ker f$ est donc la droite d'équation

$$\begin{cases} 2x - y = & 0 \\ z = & x + y \end{cases}$$

   $\ker f$ admet donc pour vecteur directeur *(ou base)* le vecteur $u = (1, 2, 3)$

(b) **Recherche de l'image de f $\mathrm{Im}f$**

▷ Du théorème aux dimensions $\dim \mathrm{Im}f + \dim \ker f = \dim E$, comme $\dim \ker f = 1$;, nous avons $\dim \mathrm{Im}f = 2$
Nous avons $\mathrm{Im}f = \mathrm{vect}\left(\{f(i), f(j), f(k)\}\right)$, il suffit d'extraire de cette famille, 2 vecteurs linéairement indépendants pour en définir une base.
Or, $f(i) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ et $f(j) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Si ces 2 vecteurs sont colinéaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(i) = \alpha f(j)$, c'est à dire que nous aurions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{5}{6} & = & \alpha \times -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & = & \alpha \times \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & & \alpha \times -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ce qui est impossible. La famille $\{f(i), f(j)\}$ est donc libre et forme une base de $\mathrm{Im}f$

▷ Une autre façon de voir les choses est de considérer la définition analytique de f

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y' = & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

Et de remarquer que $6x' + 6y' + 6z' = 0 \iff x' + y' + z' = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}f$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ dont la famille $\{f(i), f(j)\}$ forme une base *(Mais, ce n'est pas la seule ! !)*

7.11.4 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = u_F + u_G \text{ où } u_F \in F \text{ et } u_G \in G$$

On appelle symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G, l'application σ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma : E & \longrightarrow & E \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & \sigma(u) = u_F - u_G \end{array}\right.$$

Remarque 24 :

Représentation d'une symétrie dans la figure 7.6

7.11.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espace vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Soit σ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

1. **Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$**
2. **σ est un endomorphisme de E, c'est à dire que $\sigma \in \mathcal{L}(E)$**
3. **σ est un automorphisme involutif, c'est à dire que $\sigma \circ \sigma = \sigma^2 = \mathrm{Id}_E$ et σ est bijectif (c'est à dire $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$)**
4. **L'ensemble des vecteurs invariants par σ est F**
5. **L'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $\sigma(u) = -u$ est G**

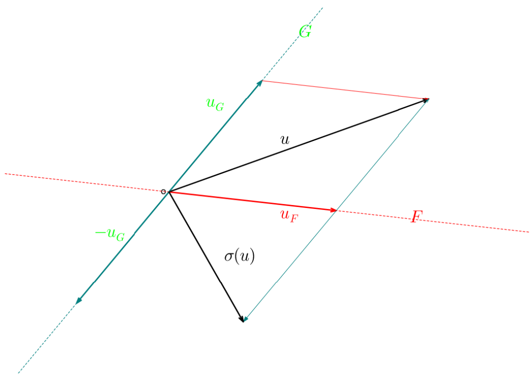

FIGURE 7.6 – Une visualisation de la symétrie vectorielle

Démonstration

La démonstration de ce théorème sera moins géométrique que 7.11.2 mais, nous utoiliserons les calculs dans $\mathcal{L}(E)$

1. Nous avons $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$
   Soit $u \in E$. Nous pouvons alors écrire $u = p(u) + (u - p(u))$, avec $p(u) \in F$ et $(u - p(u)) \in G$.
   De là, nous avons $\sigma(u) = p(u) - (u - p(u)) = 2p(u) - u = (2p - \mathrm{Id}_E)(u)$
   Nous avons donc bien $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$
2. Comme $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , nous avons $2p - \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et donc $\sigma \in \mathcal{L}(E)$
3. D'autre part, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 4p^2 - 2p - 2p + \mathrm{Id}_E$. Comme $p^2 = p$, nous avons $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$
4. Comme $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$, σ est bijectif et $\sigma^{-1} = \sigma$. Donc, $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$
5. D'autre part, pour tout $u \in E$,
   $$\sigma(u) = u \Longleftrightarrow 2p(u) - u = u \Longleftrightarrow p(u) = u \Longleftrightarrow u \in F$$
   L'ensemble des vecteurs invariants par σ est F
6. Et, pour tout $u \in E$,
   $$\sigma(u) = -u \Longleftrightarrow 2p(u) - u = -u \Longleftrightarrow p(u) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow u \in G$$
   L'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $\sigma(u) = -u$ est G

7.11.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Tout automorphisme involutif $\mathcal{S}$ de E est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à $\mathcal{V}_1$
- ▷ **$\mathcal{V}$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $\mathcal{S}$**
- ▷ **$\mathcal{V}_1$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par $\mathcal{S}$**

Démonstration

Soit $\mathcal{S}$ un automorphisme involutif de E.

1. $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$ sont des sous-espace vectoriels de E
   Il y a de multiples façons de démontrer ce résultat. Nous en choisissons un parmi d'autres !!
   - Nous avons :
     $$\mathcal{V} = \{u \in E \text{ tels que } \mathcal{S}(u) = u\} = \left\{u \in E \text{ tels que } \mathcal{S}(u) - u = \overrightarrow{0}\right\} = \left\{u \in E \text{ tels que } (\mathcal{S} - \mathrm{Id}_E)(u) = \overrightarrow{0}\right\} =$$
     $\mathcal{V}$ est donc le noyau de $\mathcal{S} - \mathrm{Id}_E$; c'est donc un sous-espace vectoriel de E

- On démontrerait de même que $\mathcal{V}_1$ est le noyau de $\mathcal{S}+\mathrm{Id}_E$; c'est donc aussi un sous-espace vectoriel de E

2. <u>E est somme directe de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$</u>
   - Nous montrons que $E=\mathcal{V}+\mathcal{V}_1$
     Soit $u\in E$
     Nous avons $u=\dfrac{1}{2}\left(u+\mathcal{S}\left(u\right)\right)+\dfrac{1}{2}\left(u-\mathcal{S}\left(u\right)\right)$
     * Nous avons $u+\mathcal{S}\left(u\right)\in\mathcal{V}$
       En effet, $\mathcal{S}\left(u+\mathcal{S}\left(u\right)\right)=\mathcal{S}\left(u\right)+\mathcal{S}^2\left(u\right)=\mathcal{S}\left(u\right)+u$; donc $u+\mathcal{S}\left(u\right)\in\mathcal{V}$ et donc $\dfrac{1}{2}\left(u+\mathcal{S}\left(u\right)\right)\in\mathcal{V}$
     * On démontrerait de la même manière que $\dfrac{1}{2}\left(u-\mathcal{S}\left(u\right)\right)\in\mathcal{V}_1$
   - Montrons que $\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
     Soit donc $v\in\mathcal{V}\cap\mathcal{V}_1$; alors $\mathcal{S}\left(v\right)=v=-v\Longrightarrow v=\overrightarrow{0}$

   E est donc somme directe de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$ et donc $E=\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}_1$
3. Ainsi $\mathcal{S}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ et parallèlement à $\mathcal{V}_1$

Exercice 55 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\{i,j,k\}$.Définir la symétrie σ par rapport au plan Π d'équation $x+y+z=0$ et parallèlement à la droite vectorielle Δ d'équation $x=-y=\dfrac{z}{2}$

<u>**Corrigé de l'exercice**</u>

Soit $u\in E$. On pose $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\sigma\left(u\right)=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

▷ Nous avons $\sigma\left(u\right)+u\in\Pi$ et donc $\left(x'+x\right)+\left(y'+y\right)+\left(z'+z\right)=0$

▷ D'autre part, si $v=u-\sigma\left(u\right)$, alors $\sigma\left(v\right)=-v$ et donc $v\in\Delta$. Comme $v=\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\\z-z'\end{pmatrix}$, nous avons :$x-x'=-y+y'=\dfrac{z-z'}{2}$, ce qui donne, en fait, 2 équations :

$$\left\{\begin{array}{rl}x-x'= & -y+y'\\ -y+y'= & \dfrac{z-z'}{2}\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}x'+y'= & x+y\\ 2y'+z'= & 2y+z\end{array}\right.$$

▷ Nous obtenons donc un système de 3 équations à 3 inconnues x', y' et z' :

$$\left\{\begin{array}{rl}x'+y'+z'= & -x-y-z\\ x'+y'= & x+y\\ 2y'+z'= & 2y+z\end{array}\right.$$

D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rl}x'= & -y-z\\ y'= & x+2y+z\\ z'= & -2x-2y-z\end{array}\right.$$

Il est tout à fait poussible de donner la matrice de σ dans la base $\{i,j,k\}$:

$$\mathcal{M}\left(\sigma\right)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$$

Et, par calcul, on montre facilement que $\mathcal{M}^2\left(\sigma\right)=\mathcal{M}\left(\sigma\right)\times\mathcal{M}\left(\sigma\right)=\mathrm{I}_3$

7.11.7 Exercices

Exercice 56 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$.
Dans chacune des questions qui suivent, D et Δ sont des droites vectorielles de E telles que $D \cap \Delta = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
p est la projection sur D parallèlement à Δ.

1. Définir analytiquement p lorsque chacune des droites est définie par une équation cartésienne :

   (a) $D:\ x = 0$ et $\Delta:\ x + 2y = 0$

   (b) $D:\ x = 0$ et $\Delta:\ ax + by = 0$

   (c) $D:\ x + y = 0$ et $\Delta:\ 2x + 3y = 0$

   (d) $D:\ ax + by = 0$ et $\Delta:\ \alpha x + \beta y = 0$

2. Définir analytiquement p lorsque D est définie par une équation cartésienne et Δ par l'une de ses bases u :

   (a) $D:\ 2x + 3y = 0$ et $\Delta:\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $D:\ x + 2y = 0$ et $\Delta:\ u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (c) $D:\ x = 0$ et $\Delta:\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (d) $D:\ ax + by = 0$ et $\Delta:\ u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

3. Définir analytiquement p lorsque D est définie par l'une de ses bases u et Δ par l'une de ses bases v :

   (a) $D:\ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $D:\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (c) $D:\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

   (d) $D:\ u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Exercice 57 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est A. Démontrer, dans chacun des cas suivants que f est une projection sur une droite D parallèlement à une droite Δ. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Δ

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$

Exercice 58 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est une projection sur une droite D parallèlement à une droite Δ si et seulement si :
$$a + d = 1 \text{ et } ad = bc$$
2. Démontrer que f est une symétrie par rapport à une droite D parallèlement à une droite Δ si et seulement si :
$$a + d = 0 \text{ et } ad - bc = 1$$
3. Trouver a et b de telle sorte que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ soit :

   (a) La matrice d'une projection *(on donnera alors les caractéristiques de cette projection)*

   (b) La matrice d'une symétrie *(on donnera alors les caractéristiques de cette symétrie)*

Exercice 59 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$.
Soit D une droite vectorielle de E et Π un plan de E tels que $D \cap \Pi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. p est la projection sur D parallèlement à Π.
Définir analytiquement p lorsque D est définie par l'une de ses bases u et Π par une équation cartésienne :

1. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi :\ z = 0$
2. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi :\ ax + by + cz = 0$
3. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi :\ -x + 2y + z = 0$
4. $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\Pi :\ z = 0$

Exercice 60 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est A. Démontrer que f est une projection sur une droite vectorielle D parallèlement à un plan vectoriel Π. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Π

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 61 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est A. Démontrer que f est une projection sur un plan vectoriel Π parallèlement à une droite vectorielle D. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Π

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 62 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est un projecteur
2. Déterminer l'image et le noyau de f
3. Démontrer qu'il existe au moins une base $\{u, v\}$ de E dans laquelle la matrice de f soit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $_Delta$ et Δ' sont les droites vectorielles d'équation :

$$\Delta :\ y = 2x \qquad \Delta' :\ y = -3x$$

1. La symétrie $\mathcal{S}$ par rapport à Δ de direction *(ou parallèlement à)* Δ' associe à tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathcal{S}(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   Calculer x' et y' en fonction de x et y
2. La symétrie $\mathcal{T}$ par rapport à Δ' de direction Δ associe à tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$
   Calculer x'' et y'' en fonction de x et y
3. Définir l'application $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$

Exercice 64 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme involutif
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est un plan vectoriel Π dont on donnera une base $\{u, v\}$.
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = -x$ est une droite vectorielle D dont on donnera une base $\{w\}$.
4. Démontrer que $\{u, v, w\}$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 65 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous définissons E_λ par :
   $$E_\lambda = \{x \in E \text{ tels que } f(x) = \lambda x\}$$
   (a) Démontrer que si $f \circ f = f$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$
   (b) Démontrer que si f est involutive, alors $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$
   (c) Démontrer que si f est involutive, et $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$, alors $E_\lambda = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
2. Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :
   $$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Démontrer que f est un automorphisme involutif de E
   (b) Déterminer E_1 et E_{-1} en donnant une base pour chacun d'eux.
   (c) Démontrer que E_1 et E_{-1} sont supplémentaires ; en déduire une nouvelle base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 66 :

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$.
On considère la famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes f_m de E de matrice $\mathcal{M}(f_m) = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_m n'est pas un automorphisme de E
2. Déterminer noyau et image de chacun des endomorphismes de $\mathcal{F}$ qui ne sont pas des automorphismes
3. Déterminer et reconnaître tous les automorphismes de la famille $\mathcal{F}$ qui sont involutifs.