Chapitre 6

Les nombres complexes

Il y a plusieurs façons de définir les nombres complexes ; la construction proposée ici est intéressante puisqu'elle est proche de la géométrie plane et des transformations géométriques.
Les nombres complexes se retrouvent partout, et même en analyse

6.1 Une construction des nombres complexes

Dans ce paragraphe, nous considérons $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, anneau des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels

6.1.1 Définition et théorème

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Alors, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.
$\mathbb{C}$ est appelé corps des nombres complexes

Démonstration

Nous savons que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire ; c'est cette propriété que nous allons réutiliser car $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrons que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien
   Nous allons démontrer que $\mathbb{C}$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$
   - ⊵ Premièrement, $\mathbb{C} \neq \emptyset$ puisque la matrice nulle $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{C}$
   - ⊵ En second lieu, soient $A \in \mathbb{C}$ et $A_1 \in \mathbb{C}$, et montrons que $A - A_1 \in \mathbb{C}$
     Posons $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$. Alors :
     $$A - A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a_1 & -b + b_1 \\ b - b_1 & a - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a_1 & -(b - b_1) \\ b - b_1 & a - a_1 \end{pmatrix}$$
     La matrice $A - A_1$ est donc du type $A - A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et est donc un élément de $\mathbb{C}$
     Ainsi, $(\mathbb{C}, +)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
2. Montrons que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe abélien
   - ⊵ Tout d'abord, l'élément neutre pour la multiplication des matrices $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{C}^*$

- ⊵ Il faut montrer que la multiplication des matrices est interne. Comme tout à l'heure, posons $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A_1=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a_1\in\mathbb{R}$ et $b_1\in\mathbb{R}$. Alors :

$$A\times A_1=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1-bb_1 & -ab_1-ba_1 \\ ba_1+ab_1 & -bb_1+aa_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1-bb_1 & -(ba_1+ab_1) \\ ba_1+ab_1 & aa_1-bb_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A\times A_1$ est donc du type $A\times A_1=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et est donc un élément de $\mathbb{C}^*$

- ⊵ Il faut maintenant montrer que si $A\in\mathbb{C}$, alors A^{-1} existe et $A^{-1}\in\mathbb{C}$

Rappel : comment calculer l'inverse d'une matrice 2×2 ?

Si $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors X est inversible si et seulement si $\det X=ad-bc\neq 0$ et $X^{-1}=\dfrac{1}{\det X}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Soit $A\in\mathbb{C}^*$, alors $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\det A=a^2+b^2$ et $\det A=0$ si et seulement si $a=b=0$.
Or, comme $A\in\mathbb{C}^*$, $A\neq\mathcal{O}$ et donc A est inversible.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

Nous avons bien A^{-1} qui exiqte et $A^{-1}\in\mathbb{C}$

3. La multiplication des matrices est, par définition, distributive par rapport à l'addition des matrices.
$(\mathbb{C},+,\times)$ est donc un corps commutatif.

6.1.2 Proposition

Soit $S\subset\mathbb{C}$, l'ensemble suivant : $S=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\text{ où } a\in\mathbb{R}\right\}$
Alors, $(S,+,\times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{R}$

Démonstration

1. Nous montrons que $(S,+)$ est un groupe abélien
   - ⊵ Tout d'abord, $S\neq\emptyset$ puisque $\mathcal{O}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in S$
   - ⊵ Soient $A\in S$ et $B\in S$, et montrons que $A-B\in S$

   Posons $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. Alors :

$$A-B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

   La matrice $A-B\in S$ Ainsi, $(S,+)$ est un groupe abélien .
2. Nous montrons que $(S^*,\times)$ est un groupe abélien
   - ⊵ Tout d'abord, $S^*\neq\emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in S^*$
   - ⊵ Soient $A\in S$ et $B\in S$, et montrons que $A\times B^{-1}\in S$

   Posons $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$. Alors $B^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}$

   et :

$$A\times B^{-1}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{b} \end{pmatrix}$$

La matrice $A \times B^{-1} \in S$ Ainsi, $(S^*, \times)$ est un groupe abélien .
Ainsi, $(S, +, \times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

3. Montrons que $(S, +, \times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times)$
Il suffit de créer une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ et de démontrer que c'est un isomorphisme de corps ; cette application est évidente :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S \\ a & \longmapsto & \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{array}$$

⊵ Nous avons clairement, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; φ est donc un homomorphisme de groupe additif
⊵ De la même manière, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$; φ est donc un homomorphisme de groupe multiplicatif
⊵ De plus, $\ker \varphi = \{0\}$, donc φ est injective
⊵ De même, φ est surjective.
On en conclue que φ est un isomorphisme de corps.

Remarque 1 :

Remarque très importante :

S isomorphe à $\mathbb{R}$ signifie que S et $\mathbb{R}$ ont même structure. On identifie S à $\mathbb{R}$ en posant $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$

Nous avons, en particulier $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Grâve à cet identification, nous avons $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

6.1.3 Théorème

$\mathbb{C}$, muni de l'addition des nombres complexes et de la multiplication par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Démonstration

1. Nous savons déjà que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\lambda z = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$$
Nous avons bien $\lambda z \in \mathbb{C}$
3. La multiplication par un nombre réel vérifie clairement les axiômes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel
(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $1.z = z$
(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $\lambda(\lambda_1 z) = (\lambda\lambda_1) z$
(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $(\lambda + \lambda_1) z = \lambda z + \lambda_1 z$
(d) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda(z + z_1) = \lambda z + \lambda z_1$
4. Base et dimension de $\mathbb{C}$
⊵ La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice ; en effet, pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$, nous avons : :
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\trianglerighteq$ La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre, puisque :

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = 0$$

$\trianglerighteq$ Donc, la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{C}$, et donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Remarque 2 :

Nous aurions pu aussi démontrer que $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Remarque 3 :

Remarque très importante

1. De la même manière que nous avons identifié la matrice $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au nombre réel 1, nous posons $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrive $z = a + ib$
2. La famille $\{1, i\}$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$
3. Comme $\{1, i\}$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, pour tout nombre complexe $z = a+bi$ et $z' = a' + b'i$, nous avons :

$$z = z' \Longleftrightarrow a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

6.1.4 Proposition

Nous avons $i^2 = -1$

<u>Démonstration</u>

Il suffit d'utiliser le calcul matriciel :

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

6.1.5 Synthèse

On appelle <u>nombre complexe</u>, un nombre de la forme $z = a + bi$ **où** $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ **et** $i^2 = -1$
$\mathbb{C}$ **est l'ensemble des nombres complexes ;** $\mathbb{C}$ **est un ensemble contenant l'ensemble des nombres réels :** $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
a **est la partie réelle de** z**, tandis que** b **est la partie imaginaire de** z
On note $a = \Re(z)$ **et** $b = \Im(z)$

Remarque 4 :

1. Si la partie réelle est nulle, z est dit <u>imaginaire pur</u>.Les imaginaires purs sont de la forme $z = \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Si la partie imaginaire est nulle, z est simplement dit réel.
3. $z = a + bi$ est dit <u>forme algébrique</u> des nombres complexes

6.1.6 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Voici, énoncées, les règles de calcul élémentaire dans $\mathbb{C}$; c'est la synthèse de ce qui a été étudié ci-dessus

1. $i^2 = -1$
2. **Pour tout** $a \in \mathbb{R}$ **et tout** $b \in \mathbb{R}$, **nous avons :** $a \times (bi) = (ab)\, i$
3. **Règle d'addition :** $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')\, i$
4. **Règle de multiplication :**
$$(a + bi) \times (a' + b'i) = aa' + ab'i + bia' + bb'i^2 = (aa' - bb') + i\,(ab' + ba')$$
5. **Pour** $z \neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
6. $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **et** $b = 0$

Exemple 1 :

En utilisant les règles énoncées ci-dessus :

1. Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants

(a) $\dfrac{1}{1+3i}$

Résolution

Pour résoudre une telle question, il faut utiliser une expression appelée *conjuguée*[1]. Le conjugué de $1 + 3i$ est $1 - 3i$, donc :

$$\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} \overset{\text{identité remarquable}}{=} \frac{1-3i}{\left(1^2-(3i)^2\right)} = \frac{1-3i}{(1-9i^2)} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3i}{10}$$

(b) $\dfrac{3+4i}{3-4i}$

Résolution

La méthode sera la même :

$$\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{(3+4i)^2}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(3+4i)^2}{3^2-16i^2} = \frac{(3+4i)^2}{25} = \frac{1}{25}\left(9+16i^2+24i\right) = \frac{-7}{25} + \frac{24i}{25}$$

(c) $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta}$ pour $\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Résolution

La méthode est la même, sauf qu'ici, il faut connaître, en plus, ses formules trigonométriques ! !....Mais, c'est très soft ! !

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}} = \cos\theta\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta$$

Donc, $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta} = \cos\theta$

1. Très semblable à la notion de conjugué vu avec les racines carrées. Un paragraphe sera consacré au conjugué des nombres complexes

Remarque 5 :

1. Toutes les règles de calcul concernant l'addition et la multiplication s'appliquent à $\mathbb{C}$ comme à $\mathbb{R}$
2. La formule du binôme de Newton est en particulier valable :

$$\boxed{(z_1 + z_2)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, (z_1)^p \, (z_2)^{n-p} = \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p}}$$

Exercice 1 :

1. Calculer de 2 manières différentes $(1+i)^8$; en déduire une expression de $S_1 = 2 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6$ et de $S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$
2. Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$; montrer que tout $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $z = \alpha z_1 + \beta z_2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$
4. Trouver dans $\mathbb{C}$, les complexes z et z' tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rl} iz - 3z' = & -2i \\ (1+3i)\,z + 2iz' = & -1 + 3i \end{array} \right.$$

Remarque 6 :

Il n'existe pas dans $\mathbb{C}$ de relation d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication.

En effet,
Considérons le nombre complexe i et son carré i^2.
Alors, $i^2 \geqslant 0$ *(parce que c'est un carré)*. Or $i^2 = -1$ et $-1 \leqslant 0$.
Il y a donc contradiction.