6.2 Nombres complexes et géométrie

6.2.1 Point image, affixe d'un point

On appelle P le plan affine. Rapportons ce plan à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Tout point M du plan, peut être repéré par ses coordonnées x et y. Nous avons,

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$

1. **On considère l'application**

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \xrightarrow{M} & P \\ z & \xrightarrow{M} & M(z) = (\Re(z), \Im(z)) \end{cases}$$

   On dit que M est le point-image de z

2. **Réciproquement, pour tout point $M(a, b)$ du plan, on fait correspondre un seul nombre complexe $z = a + bi$.**
   On dit alors, que z est l'affixe de M

3. **Les nombres réels ont pour image les points situés sur l'axe $(O, \vec{u})$ Cet axe est appelé axe des réels**

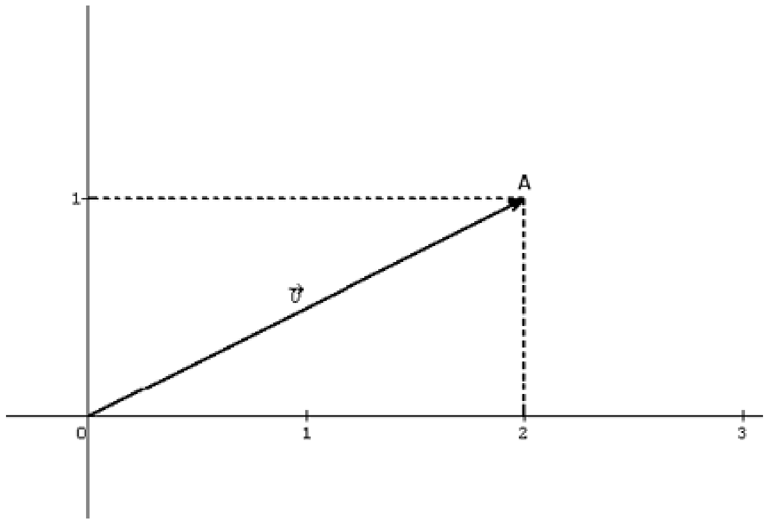

FIGURE 6.1 – Le point A d'affixe $z = 2 + i$ et le vecteur d'affixe $z = 2 + i$

Exemple 2 :

1. L'image du réel 1 est le point (1,0)
2. Les imaginaires purs ont pour image l'axe $y'Oy$ privé de O.L'axe $(O, \vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.
   Par exemple : le point $B(0, 1)$ est l'image du nombre complexe i

6.2.2 Vecteur image, affixe d'un vecteur

1. **On appelle $\vec{P}$ le plan vectoriel dont $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthonormée. Au nombre complexe z, on fait correspondre le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \Re(z) \\ \Im(z) \end{pmatrix}$. On dit que $\vec{u}$ est le vecteur-image de z**

2. **Réciproquement, tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'image d'un nombre complexe unique $z = a + bi$**
   z est l'affixe de $\vec{u}$

Exercice 2 :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs d'affixes respectives z et z', rechercher l'affixe de $\vec{u} + \vec{v}$
2. Si z est l'affixe de M, z' celui de M', quel est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$? Quel est l'affixe du milieu I du segment $[MM']$

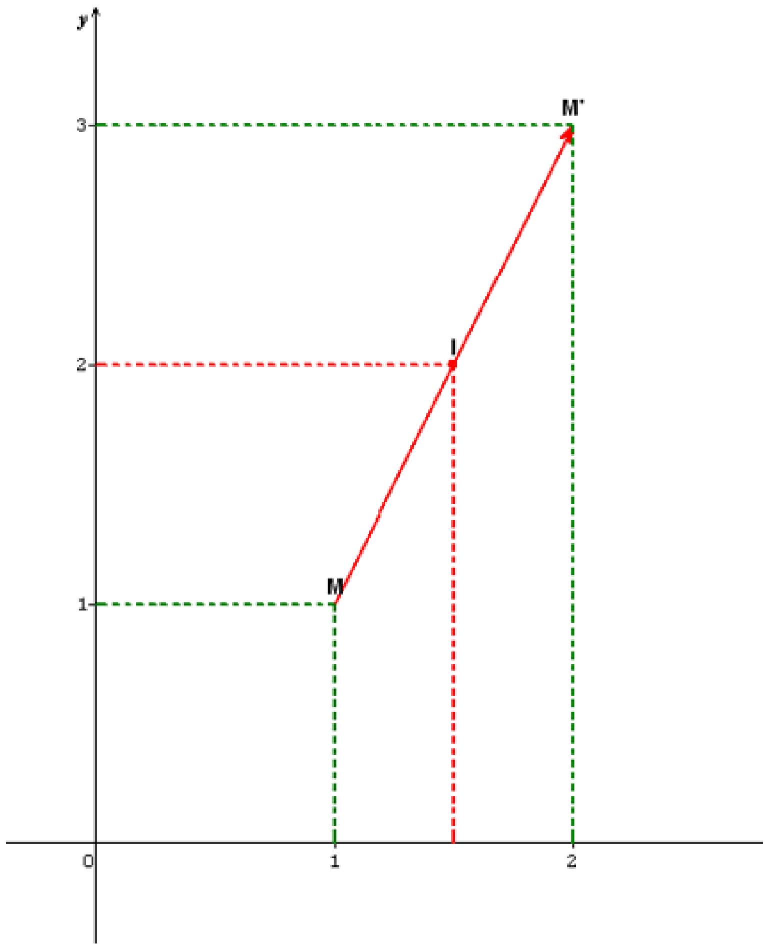

FIGURE 6.2 – Le vecteur $M\vec{M}'$ d'affixe $z_{M'} - z_M$, ainsi que I milieu du segment $[MM']$ d'affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2}$

6.3 Conjugué d'un nombre complexe, module d'un nombre complexe

Le lien entre géométrie et nombre complexe nous conduit, naturellement, à d'autres notions qui auront beaucoup d'importance.

6.3.1 Définition de conjugué

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe ; on appelle conjugué de z le nombre $\overline{z} = a - ib$

Remarque 7 :

1. Si z est l'affixe de M, le conjugué de z est l'affixe de $S(M)$, symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$

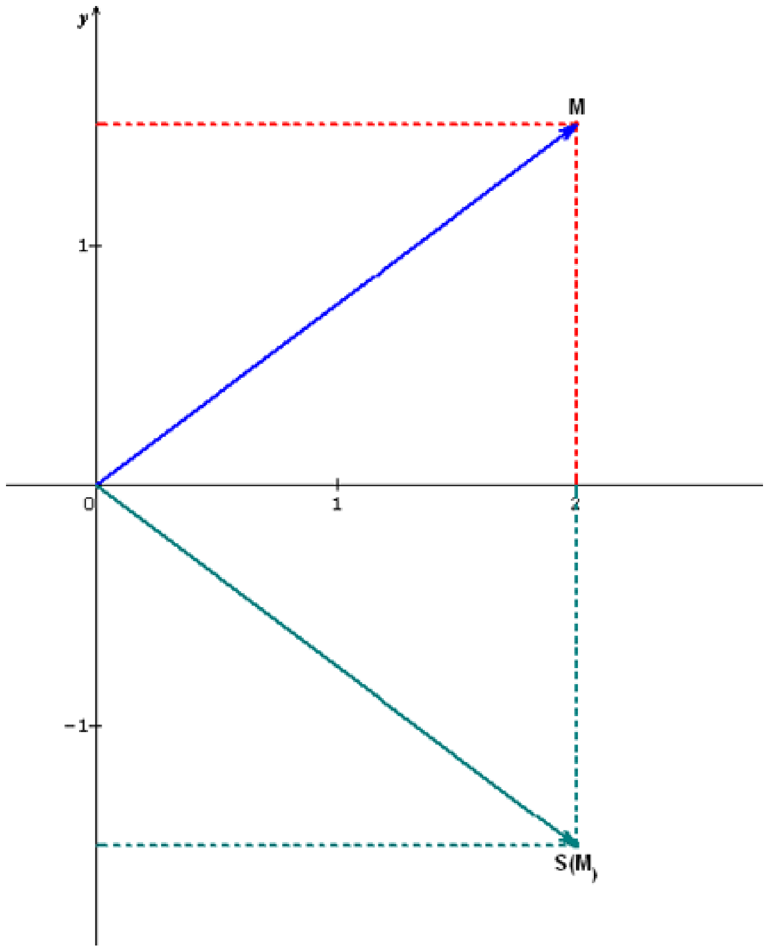

FIGURE 6.3 – Visualisation géométrique du conjugué dans $\mathbb{C}$

2. Si $z = a + bi$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

6.3.2 Propriétés du conjugué

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

2. $\overline{\overline{z}} = z$

3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

4. $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = \lambda i$ **avec** $\lambda \in \mathbb{R}$ **ou, ce qui est équivalent,**$z = -\overline{z}$ **si et seulement si** z **est un imaginaire pur.**

5. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

6. $(\forall z \in \mathbb{C}^*)(\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}})$

Démonstration

Je ne fais pas toutes les démonstrations, car certaines sont bien évidentes

1. Montrons que $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = \lambda i$
   - ▷ Si $z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z} = -\lambda i = -z$
   - ▷ Réciproquement, si $z = -\overline{z}$, en passant à la forme algébrique, nous avons $x+iy = -x+iy \Longleftrightarrow 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, et donc $z = iy$ et z est imaginaire pur.

   On montre de la même manière que $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
2. Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ est essentiellement calculatoire, en passant par la forme algébrique des nombres complexes.
3. Montrons que $(\forall z \in \mathbb{C}^*) \left(\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\right)$

   Nous le faisons en utilisant la forme algébrique des nombres complexes. Si $z = x + iy$, alors :
   - ▷ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$
   - ▷ $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

Remarque 8 :

L'application

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{C} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{C} \\ z & \xrightarrow{\delta} & \delta(z) = \overline{z} \end{cases}$$

est un isomorphisme de corps

En effet

- ▷ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons $\delta(z+z') = \delta(z) + \delta(z')$ et $\delta(zz') = \delta(z)\,\delta(z')$
- ▷ De plus $z \in \ker\delta$ si et seulement si $\delta(z) = 0$, c'est à dire si et seulement si $a - ib = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Exercice 3 :

Montrer que les seules bijections $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, laissant chaque réel invariant et telles que

$$(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(f(z+z') = f(z) + f(z') \text{ et } f(zz') = f(z)f(z')$$

sont toutes de la forme $f(z) = \overline{z}$ ou $f = Id_{\mathbb{C}}$
(C'est une question difficile !)

Exercice 4 :

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, c'est à dire que $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $a_k \in \mathbb{R}$. Montrer que si z_0 est racine, il en est de même de $\overline{z_0}$
2. *Application*

   Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; vérifier que $j^2 = \overline{j}$, puis que j est racine de $Q(x) = 1 + x + x^2$. En déduire une factorisation de $Q(x)$, puis que $j^3 = 1$

6.3.3 Définition de module d'un nombre complxe

Soit $z \in \mathbb{C}$

On appelle module du nombre complexe z, le réel positif $|z|$ tel que $\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}$

Remarque 9 :

1. Si $z = x + iy$, alors, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ n'est autre que la distance de l'origine à l'image M de z : $|z| = OM$. C'est aussi la norme du vecteur $\vec{u}$ dont z est l'affixe : $|z| = \|\vec{u}\|$
3. Le module d'un nombre réel, n'est autre que sa valeur absolue

6.3.4 Propriétés du module d'un nombre complexe

1. $(\forall z \in \mathbb{C})\,(|\Re(z)| \leqslant |z|)$ **et** $(|\Im(z)| \leqslant |z|)$

2. $(\forall z \in \mathbb{C})\,(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

3. $(\forall z \in \mathbb{C})(|z| = |-z|)$ **et** $(|z| = |\overline{z}|)$

4. $(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(|zz'| = |z|\,|z'|)$

Démonstration

Nous ne démontrons que les points qui pourraient poser une difficulté (toute relative !!)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$; alors, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; comme $x^2 \leqslant x^2 + y^2$, nous avons $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, c'est à dire $|x| \leqslant |z|$, c'est à dire $|\Re(z)| \leqslant |z|$.
   On démontrerait de la même manière que $|\Im(z)| \leqslant |z|$
2. Démontrons que $(\forall z \in \mathbb{C})\,(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$
   - ▷ Si $z = 0$, bien entendu que $|z| = 0$
   - ▷ Réciproquement, supposons que $|z| = 0$; alors $x^2 + y^2 = 0$, et donc $x = y = 0$ et donc $z = 0$

6.3.5 Inégalité triangulaire

Pour tout $(z \in \mathbb{C})$ **et tout** $(z' \in \mathbb{C})$**, nous avons** $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$

Démonstration

L'ensemble des nombres complexes étant identifié au plan (on parle aussi, parfois, de plan complexe), l'intuition géométrique doit jouer son rôle. Un schéma, même s'il n'est pas une démonstration, peut être d'une grande aide ; l'idée de base étant que module et norme jouent le meme rôle

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\,\overline{(z + z')} \text{ par définition du module}\\
&= (z + z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right)\\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}\\
&= |z|^2 + |z'|^2 + \left(z\overline{z'} + z'\overline{z}\right)
\end{aligned}$$

Or, on peut remarquer que $(z\bar{z'} + z'\bar{z}) = 2\Re(z\bar{z'})$ et comme, $2\Re(z\overline{z'}) \leqslant 2|z\overline{z'}|$, que $2|z\overline{z'}| = 2|z||\overline{z'}| = 2|z||z'|$, nous avons :

$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

C'est à dire

$$|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$$

D'où le résultat.

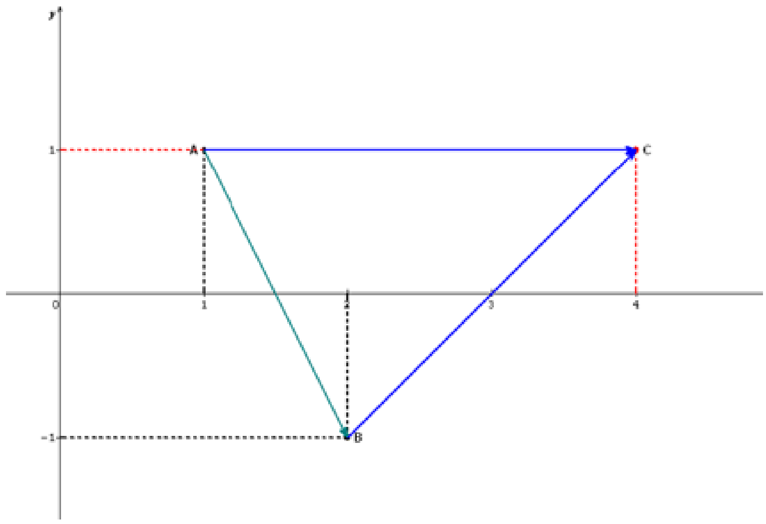

FIGURE 6.4 – Visualisation géométrique de l'inégalité triangulaire

Remarque 10 :

1. On peut généraliser le résultat : pour tout $z_1, z_2, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ nous avons :

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots |z_n| \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

2. On peut remarquer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z^p| = |z|^p$ *(se démontre par récurrence)*

Exercice 5 :

1. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|)$
2. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}^*)\left(\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)$
3. Montrer que $(|z| = 1) \Leftrightarrow \left(\overline{z} = \frac{1}{z}\right)$

Exercice 6 :

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Exercice 7 :

Montrer que pour tout complexe Z, il existe un élément $w = a + ib$ (avec a et b entiers relatifs) tel que $|Z - w| < 1$

Exercice 8 :

Montrer que si $|u| = 1$, alors $\frac{z - u\overline{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}$