6.4 Résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

L'objet de cette partie est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Il peut se poser une question forte, dans ce paragraphe : les nombres complexes ont-ils tous une *(ou deux)* racine carrée ? La réponse est positive et est dans le théorème fondamental de l'Algèbre. Ici, ce n'est pas la question ; cf 6.4.2

6.4.1 Résolution de l'équation $z^2 = 1 + i$

C'est une équation du second degré particulière ; c'est, en fait, la recherche des racines carrées de $1 + i$

1. Si z_0 est une racine de $1 + i$, alors, $z_0^2 = 1 + i$, et on peut écrire $\left|z_0^2\right| = |z_0|^2 = |1 + i|$
2. Si $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $|z_0|^2 = x_0^2 + y_0^2$ et $z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2ix_0y_0$
3. Nous obtenons donc le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} x_0^2 + y_0^2 = & \sqrt{2} \\ x_0^2 - y_0^2 = & 1 \\ 2x_0y_0 = & 1 \end{array}\right.$$
D'où nous tirons : $x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $x_0 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $y_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $y_0 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$
4. L'identité $2x_0y_0 = 1$ nous impose x_0 et y_0 de même signe ;
5. D'où $z_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou bien $z_0 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

6.4.2 Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On utilise la « forme canonique des lycées » de $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$:

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Si ω est une racine carrée de $b^2 - 4ac$, le polynôme du second degré devient :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}\right] = a\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a}\right]$$

L'équation a donc 2 solutions : $z' = \dfrac{-b-\omega}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\omega}{2a}$. On a, évidemment, si $b^2 - 4ac = 0$, alors $z' = z''$

Remarque 11 :

On remarque que l'important, dans un polynôme du second degré, est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
La résolution d'une équation du second degré, même dans $\mathbb{C}$, commence donc par le calcul du discrimant ; l'algorithme se succède ensuite comme dans $\mathbb{R}$, sauf que même si Δ est négatif, il y a toujours deux racines. La difficulté supplémentaire sera de rechercher une racine carrée d'un nombre complexe.

Remarque 12 :

En effectuant la somme et le produit des racines z' et z'', nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} z' + z'' = & -\dfrac{b}{a} \\ z'z'' = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

Réciproquement, si a, b et c sont 3 nombres complexes tels que $a \neq 0$, et u_1, u_2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl} u_1 + u_2 = & -\dfrac{b}{a} \\ u_1 u_2 = & \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

alors, u_1 et u_2 sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
Donc, résoudre dans $\mathbb{C}$, le système

$$\left\{\begin{array}{rl} z_1 + z_2 = & S \\ z_1 z_2 = & P \end{array}\right.$$

revient donc à résoudre l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ $az^2 - Sz + P = 0$

Exercice 9 :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$
2. $3x^2 + 2x + 2 = 0$
3. $z^2 - (3 + 2i)\,z - 1 + 3i = 0$
4. $(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z - 7i = 0$
5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$
6. $iz^3 + (1 - 2i)\,z^2 - (1 + i)\,z - 2\,(1 - i) = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle

Remarque 13 :

Il faut savoir que, dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré n a exactement n racines *(C'est le théorème de D'Alembert)*. Mais, c'est dans cet exposé, hors de propos.