6.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6.5.1 Argument d'un nombre complexe

Exercice 10 :

1. Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$. Montrer que pour tout nombre z_1, z_2, z_3 de $\mathcal{U}$ nous avons : $z_1 z_2 \in U$, $\overline{z_1} \in \mathcal{U}$, et $\dfrac{1}{z_1} \in \mathcal{U}$. Montrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$
2. Soit M, un point situé sur le cercle unité, de coordonnées (a, b) ; Donner a et b en fonction d'une mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$; en déduire l'affixe de M.
3. Réciproquement, soit $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$; à quelles conditions z est-elle l'affixe de M ?

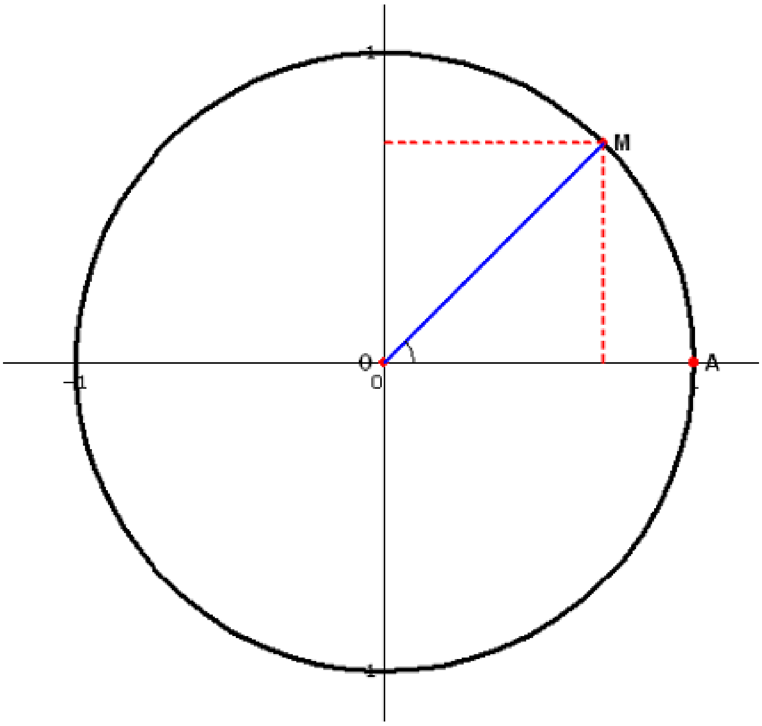

FIGURE 6.5 – Visualisation géométrique du cercle unité

6.5.2 Définition

On appelle argumentd'un nombre complexe de module 1 tout réel θ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$
L'ensemble des arguments de z est l'ensemble des mesures, en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est l'image de z dans un repère orthonormal direct

Remarque 14 :

1. Un argument est donc défini à $2k\pi$ près
2. Tout argument de z, noté $\arg(z)$, est congru à θ modulo 2π

Exemple 3 :

1. Quel est l'argument de $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

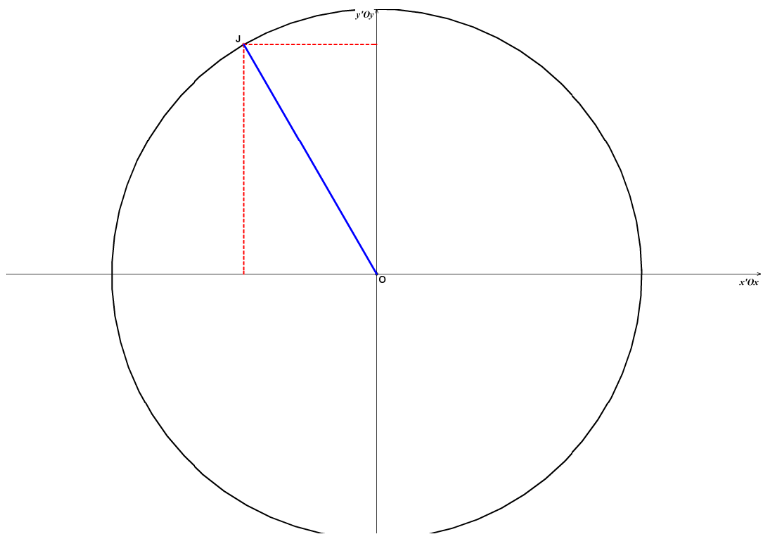

FIGURE 6.6 – Visualisation géométrique d'une racine cubique de 1 : $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nous devons avoir $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2. Si $|z| = 1$, quel est l'argument de $\overline{z}$?
   Voilà une question qui pourrait être une question de cours ! !
   Si $z = \cos\theta + i\sin\theta$, alors $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$. L'argument de $\overline{z}$ est donc $-\theta + 2k\pi$

6.5.3 Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. Alors $\boxed{\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]}$

Démonstration

On écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$. Alors :

$$zz' = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$$

Nous utilisons ensuite, les formules d'addition de la trigonométrie et nous avons alors le résultat cherché

6.5.4 Propriété

Si $|z| = 1$ **alors** $\arg(\frac{1}{z}) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

Démonstration

Si $|z| = 1$;, alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$ et comme $\arg(\overline{z}) \equiv\equiv -\arg(z)[2\pi]$, nous avons bien $\arg(\frac{1}{z}) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

6.5.5 Formule de De Moivre

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{((\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Remarque 15 :

Voici une formule essentielle, très utile pour connaître presque toutes les formules de trigonométrie.

Démonstration

1. **Supposons $n \in \mathbb{N}$**
   La démonstration se fait par une récurrence simple, en utilisant les formules d'addition.
   Vérifions pour $n = 0$ Nous avons $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$ et $\cos 0\theta + i\sin 0\theta = 1$
   La formule est donc vraie pour $n = 0$
   Supposons la formule vraie à l'ordre n c'est à dire que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
   Démontrons la formule à l'ordre $n+1$ Nous avons :
   $$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \times (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta) \times (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + i(\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta)\end{aligned}$$
   Or, par les formules d'addition, nous avons : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
   Donc : $\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta = \cos(n+1)\theta$ et $\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta = \sin(n+1)\theta$
   D'où $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$
2. **Supposons $n \in \mathbb{Z}$ et supposons n négatif** ; il existe alors $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n'$. Donc, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'}$
   Or, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n'}}$.
   Par la formule de De Moivre démontrée lorsque $n' \in \mathbb{N}$, nous avons :
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n'}} = \frac{1}{\cos n'\theta + i\sin n'\theta}$$
   Or, si $|z| = 1$, nous avons $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ et donc $\dfrac{1}{\cos n'\theta + i\sin n'\theta} = \cos n'\theta - i\sin n'\theta$
   De la parité de cos, nous avons $\cos n'\theta = \cos -n'\theta$ et de l'imparité de sin, nous avons $-i\sin n'\theta = i\sin -n'\theta$, de telle sorte que :
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \cos n'\theta - i\sin n'\theta = \cos -n'\theta + i\sin -n'\theta = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
   Ce que nous voulions

Exemple 4 :

1. 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. La forme trigonométrique de i est donc $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$
   D'où $i^n = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{2} + i\sin\dfrac{n\pi}{2}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right)^n = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$; c'est la forme trigonométrique des racines n-ièmes de 1

6.5.6 Proposition

On appelle $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ le cercle unité. Alors, $(\forall z \in \mathbb{C})\,(\exists z_0 \in \mathcal{U})\,(z = z_0 \times |z|)$

Démonstration

— Si $z = 0$, tous les éléments de $\mathcal{U}$ conviennent
— Si $z \neq 0$, alors, $|z| > 0$ et $z = \dfrac{z}{|z|} \times |z|$. En posant $z_0 = \dfrac{z}{|z|}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ et on a le résultat

Remarque 16 :

Il existe donc $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$.

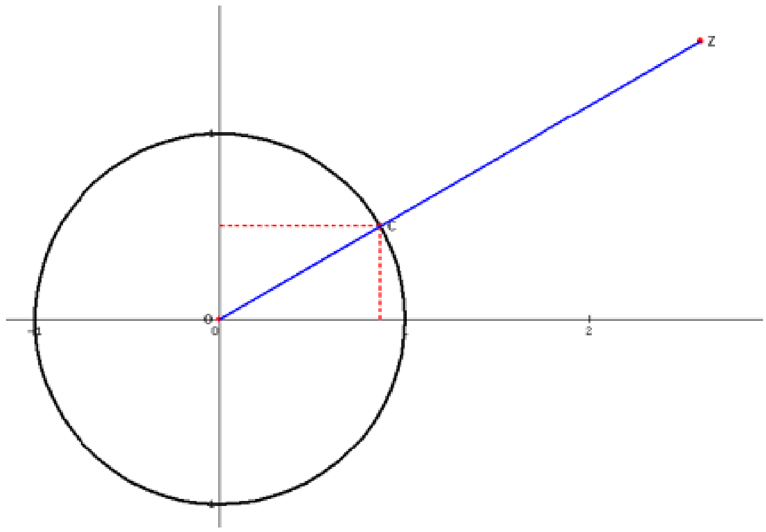

FIGURE 6.7 – Quelle interprétation géométrique pouvons nous donner ?

6.5.7 Définition

Le réel θ_0 est appelé Argument de z
L'écriture $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ est l'écriture trigonométrique de z
L'argument de z est toujours défini à $2k\pi$ près

6.5.8 Proposition

2 nombres complexes $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$ sont égaux, si et seulement si,

$$|z| = |z'| = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{et} \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

6.5.9 Recherche de la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, alors $z = |z|\,(\dfrac{a}{|z|} + i\dfrac{b}{|z|})$

Donc $\boxed{\cos(\arg z) = \dfrac{a}{|z|}}$ **et** $\boxed{\sin(\arg z) = \dfrac{b}{|z|}}$

Exemple 5 :

Donner la forme trigonométrique de $z = -1 + i\sqrt{3}$

On regarde d'abord le module !

$$\left|-1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Donc, $\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où on, tire que $\begin{cases} \cos\left(\arg\left(z\right)\right) = \frac{-1}{2} \\ \sin\left(\arg\left(z\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc, $\arg\left(z\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, et la forme trigonométrique de $z = (-1+i\sqrt{3})$ est

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

On peut même écrire l'égalité : $-1+i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$

Exercice 11 :

Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 1+i$
2. $z_2 = -1-i$
3. $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta$
4. $z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$
5. $z_5 = \frac{3}{1-i}$

6.5.10 Propriétés

Pour tout nombre complexe z et z' non nuls

1. $\arg\left(zz'\right) \equiv \arg\left(z\right) + \arg\left(z'\right)\ [2\pi]$
2. $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\arg\left(z^n\right) \equiv n\arg\left(z\right)\ [2\pi])$
3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg\left(z\right)\ [2\pi]$
4. $\arg\left(\overline{z}\right) \equiv -\arg\left(z\right)\ [2\pi]$

Démonstration

Les démonstrations sont simples et laissées à faire seuls. Cependant, il faut remarquer que la proposition est établie pour tout nombre complexe non nul, et de module quelconque (et non plus 1)

6.5.11 Généralisation

Pour tout nombre complexe z et z' non nuls

1. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg\left(z\right) - \arg\left(z'\right)\ [2\pi]$
2. $(\forall n\in\mathbb{N})\ \left(\arg\left(\frac{1}{z^n}\right) \equiv -n\arg\left(z\right)\ [2\pi]\right)$
3. $(\forall p\in\mathbb{Z})\ (\arg\left(z^p\right) \equiv p\arg\left(z\right)\ [2\pi])$

Remarque 17 :

— Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que la notion d'argument d'un nombre complexe, "marche" un peu comme le logarithme chez les réels. Rien d'étonnant à cela, puisque, avec les arguments des complexes, on "touche du doigt" la théorie du logarithme des nombres complexes

— Interprétation géométrique de la multiplication
Elle correspond, en fait, géometriquement, à une rotation composée d'une homothétie, c'est à dire,une similitude directe

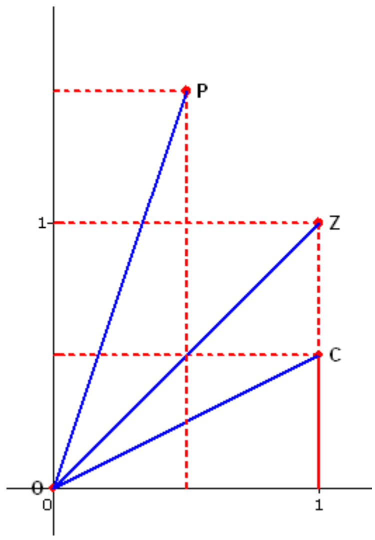

FIGURE 6.8 – La multiplication de z_C affixe du point C par z_Z affixe du point Z donne le complexe z_P affixe du point P

6.6 Racines n-ième d'un nombre complexe

6.6.1 Présentation par un cas particulier

On veut rechercher les racines 4^{es} de $16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

Comment s'y prendre ?

Soit $\alpha = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, une racine 4^{es} de $16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

Ceci veut donc dire que $\alpha^4 = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, et, par la formule de De Moivre,

$$\rho^4\left(\cos 4\theta + i\sin 4\theta\right) = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^4 = 16 \\ 4\theta \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right.$$

Comme, $\rho > 0$, nous avons l'équivalence $\rho^4 = 16 \Leftrightarrow \rho = 2$ et

$$4\theta \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow 4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

On obtient ainsi 4 racines 4^{es}, distinctes, fonction des valeurs de k

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) & \text{pour } k = 0, k = 4, \ldots, k = 4p & \text{c'est à dire } k \equiv 0\,[4] \\ \alpha_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) & \text{pour } k = 1, k = 5, \ldots, k = 4p+1 & \text{c'est à dire } k \equiv 1\,[4] \\ \alpha_2 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) & \text{pour } k = 2, k = 6, \ldots, k = 3p+2 & \text{c'est à dire } k \equiv 2\,[4] \\ \alpha_3 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) & \text{pour } k = 3, k = 7, \ldots, k = 4p+3 & \text{c'est à dire } k \equiv 3\,[4] \end{array}\right.$$

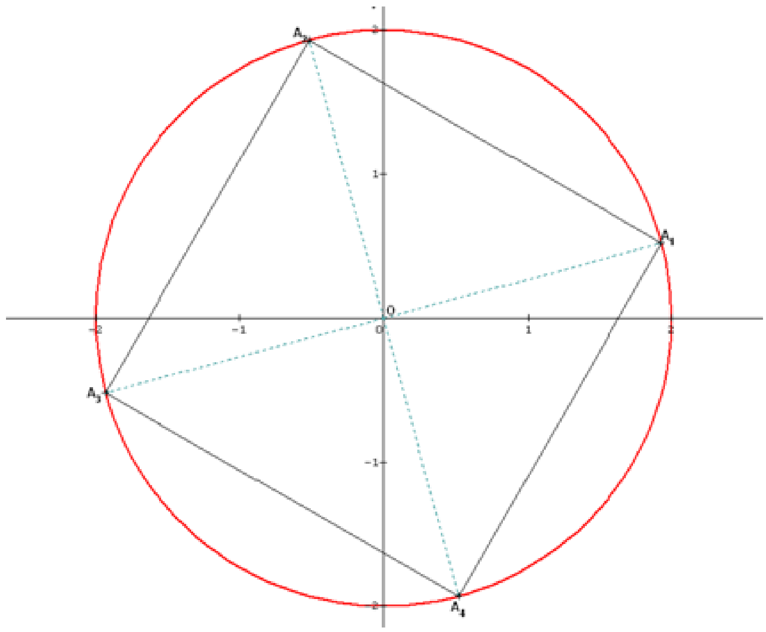

FIGURE 6.9 – Représentation des 4 racines quatrièmes de $16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$; ce sont le sommets d'un carré

6.6.2 Théorème

Soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :
$Z \in \mathbb{C}$ admet n racines n-ièmes distinctes ; elles sont de la forme :

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)}$$

où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile, et généralise seulement ce qui a été fait dans la présentation 6.6.1
Il faut déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$
Or, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, et donc,

$$z^n = \rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

De là, nous déduisons que :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } r > 0$$

Exemple 6 :

1. Recherche des racines cubiques de 1 et de $1 + i$
   (a) On écrit 1 sous forme trigonométrique : $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$.
   Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une racine cubique de 1, alors $z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1$ et donc ;

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Il existe donc 3 racines cubiques de 1 :

$$\begin{cases} z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ z_1 = \cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = j \\ z_2 = \cos \dfrac{4\pi}{3} + i \sin \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j} \end{cases}$$

(b) A nouveau, nous écrivons $1+i$ sous forme trigonométrique : $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Si $z = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ est une racine cubique de $1+i$, alors $z^3 = \rho^3\,(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 1$ et donc ;

$$\begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[6]{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Il existe donc 3 racines cubiques de $1+i$:

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}\right) \\ z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos \dfrac{11\pi}{12} + i \sin \dfrac{11\pi}{12}\right) \\ z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos \dfrac{19\pi}{12} + i \sin \dfrac{19\pi}{12}\right) \end{cases}$$

2. Recherche des racines carrées de i et de $-i$

(a) On écrit i sous forme trigonométrique : $i = \cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}$.
Si $z = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ est une racine carrée de i, alors $z^2 = \rho^2\,(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = i$ et donc ;

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Il existe donc 2 racines carrées de i :

$$\begin{cases} z_0 = \cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ z_1 = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -z_0 \end{cases}$$

(b) On écrit $-i$ sous forme trigonométrique : $-i = \cos \dfrac{-\pi}{2} + i \sin \dfrac{-\pi}{2}$.
Si $z = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ est une racine carrée de $-i$, alors $z^2 = \rho^2\,(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = -i$ et donc ;

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Il existe donc 2 racines carrées de $-i$:

$$\begin{cases} z_0 = \cos \dfrac{-\pi}{4} + i \sin \dfrac{-\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \\ z_1 = \cos\left(\dfrac{-\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\dfrac{-\pi}{4} + \pi\right) = \cos \dfrac{3\pi}{4} + i \sin \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -z_0 \end{cases}$$

3. De quelle forme sont les racines n-ièmes de 1 ? On écrit 1 sous forme trigonométrique : $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$.
Si $z = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta)$ est une racine n-ièmes de 1, alors $z^n = \rho^n\,(\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$ et donc ;

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Il existe donc n racines n-ièmes de 1 ; elles sont toutes de la forme $\omega_k = \cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k = 0 \cdots n-1$

6.6.3 Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient ω_k où $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ les n racines n-ièmes de 1. Alors
Pour obtenir toutes les racines n-ièmes de z, il suffit d'en connaître une seule Z_0 et de multiplier Z_0 par tous les ω_k
Autrement dit :

$$\boxed{\forall k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}\ Z_k = Z_0 \times \omega_k}$$

Démonstration

Soit Z_0 une racine n-ième de z et Z_k, une autre racine de z.
Alors, $(Z_0)^n = z$ et $(Z_k)^n = z$. Donc, $\left(\frac{Z_0}{Z_k}\right)^n = 1$, et ce qui veut dire que $\frac{Z_0}{Z_k}$ est une racine n-ièmes de 1
Donc, $\frac{Z_k}{Z_0} = \omega_k \Rightarrow Z_k = \omega_k Z_0$

Exemple 7 :

Donner les racines cubiques de -8
Une racine cubique de -8 est -2 ; les racines cubiques de 1 sont 1, j et $j^2 = \overline{j}$
Les racines cubiques de -8 sont donc :

$$\begin{cases} Z_0 = -2 \\ Z_1 = -2j = -2(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3} \\ Z_2 = -2\overline{j} = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

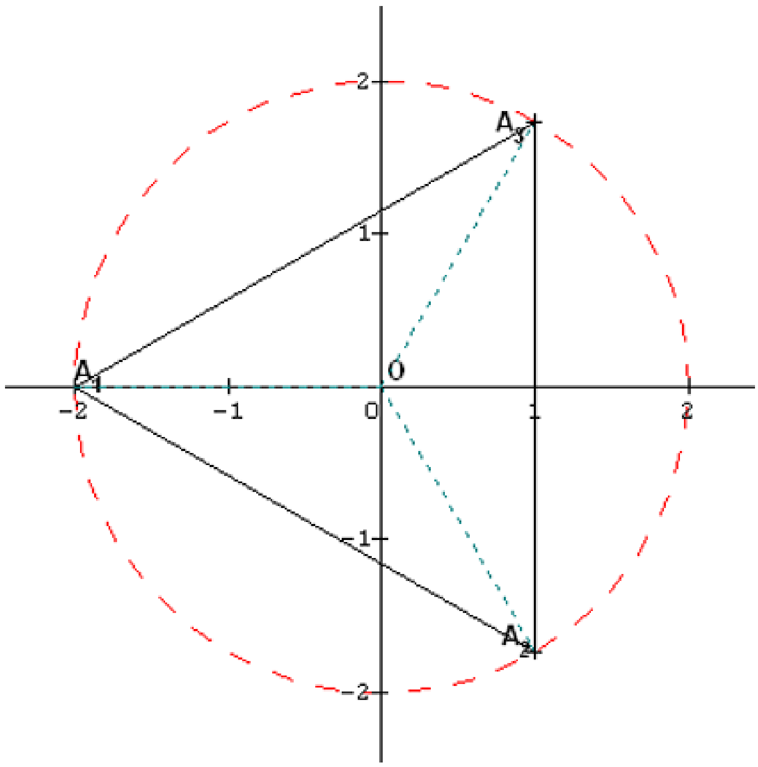

Figure 6.10 – Représentation des 3 racines cubiques de 8