6.7 L'exponentielle complexe

6.7.1 Définition de l'exponentielle complexe de module 1

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

6.7.2 Conséquences immédiates

1. **Nombres particuliers :**

   (a) $e^{0} = 1$ **(b)** $e^{i\pi} = -1$ **(c)** $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ **(d)** $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$

2. $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \dfrac{1}{e^{it}}$
3. $(\forall t \in \mathbb{R})(|e^{it}| = 1)$
4. **Nous avons les formules d'Euler :** $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ **et** $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

6.7.3 Formule de De Moivre

1. **Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $t' \in \mathbb{R}$, nous avons :**

$$e^{i\left(t+t'\right)} = \left(e^{it}\right)\left(e^{it'}\right)$$

2. **Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons** $\left(\left(e^{it}\right)^{k} = e^{ikt}\right)$
3. **Conséquence :** $(\forall z \in \mathbb{C})\left(z = |z|\, e^{i\arg(z)}\right)$

6.7.4 Théorème

1. $e^{it} = e^{it'}$ **si et seulement si** $t - t' = 2k\pi$
2. **De manière équivalente,** $e^{it} = e^{it'}$ **si et seulement si** $t - t' \equiv 0\,[2k\pi]$

6.7.5 Forme des racines n-ièmes de 1

Les racines n- iè mes de 1 s'écrivent : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ **où** $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

6.7.6 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Qu'est ce que linéariser un polynôme trigonométrique ? ?

Considérons, par exemple, la fonction $f(x) = \cos^3 x$. Comment faire pour trouver une expression plus simple, permettant, par exemple, de calculer facilement une primitive de cette fonction. Certes, les formules trigonométriques sont d'une aide certaine, mais, si nous avons des degrés plus importants, sont elles facilement manipulables ?

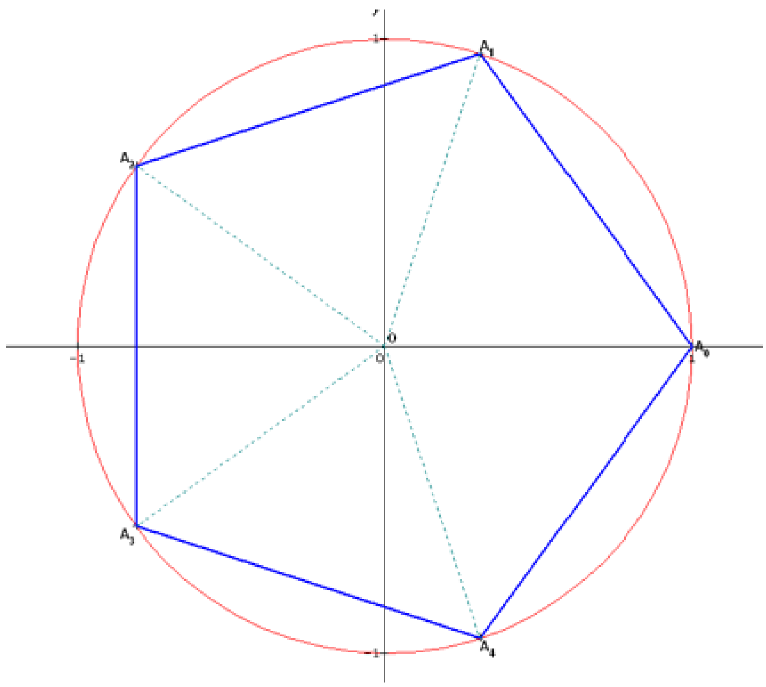

FIGURE 6.11 – Les images des racines 5-ièmes de 1 sont les sommets d'un pentagone

Linéariser

<u>Linéariser</u> une expression du type $\sin^n x$ ou $\cos^n x$, c'est trouver des constantes A_k, $k = 0, \ldots, n$, et B_k, $k = 0, \ldots, n$ telles que $\sin^n x = \sum_{k=0}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ ou $\cos^n x = \sum_{k=0}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$.

L'outil le plus important à utiliser seront **<u>d'abord les formules d'Euler</u>** :
Nous avons, si $z = e^{it}$, $z + \frac{1}{z} = \cos t$ et $z - \frac{1}{z} = \sin t$, de telle sorte qu'en utilisant les formules de Moivre, $\cos nt = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ et $\sin nt = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$

Exemple 8 :

Linéarisons $f(x) = \cos^3 x$

Commençons par écrire $\cos^3 x = \left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^3$. Nous avons alors,

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(z^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + 3z^2\frac{1}{z} + 3z\frac{1}{z^2}\right)$$

Ce qui nous permet d'écrire tout de suite :

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

c'est à dire,

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$$

Ce qui nous permet d'écrire : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$
Ce que nous voulions

Exemple 9 :

Application importante :

Calculer $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt}$

Cette expression $D_n(t)$ s'appelle **le noyau de Dirichlet**.
Tout d'abord,

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}$$

Et nous calculons les différentes sommes, comme sommes de termes de suites géométriques.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{-it}\left(1 - e^{-int}\right)}{1 - e^{-it}}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} &= \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} + \frac{e^{-it}\left(1 - e^{-int}\right)}{1 - e^{-it}} \\
&= \frac{\left(1 - e^{-it}\right)\left(1 - e^{i(n+1)t}\right) + e^{-it}\left(1 - e^{it}\right)\left(1 - e^{-int}\right)}{\left|1 - e^{t}\right|^2} \\
&= \frac{\left(e^{int} + e^{-int}\right) - \left(e^{i(n+1)t} + e^{-i(n+1)t}\right)}{2 - 2\cos t} \\
&= \frac{2\cos nt - 2\cos(n+1)t}{2 - 2\cos t} \\
&= \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}
\end{aligned}$$

Des différentes formules trigonométriques, nous tirons :

$$\begin{cases}
\cos nt - \cos(n+1)t = -2\sin\left(\dfrac{nt - (n+1)t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{nt + (n+1)t}{2}\right) = -2\sin\left(\dfrac{-t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right) \\
1 - \cos t = 2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)
\end{cases}$$

D'où on tire donc $\boxed{D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}}$