8.8 Exercices complémentaires sur les nombres complexes

8.8.1 Construction des nombres complexes

Exercice 12 :

Voilà un exercice qui ne pose aucune difficulté et qui est très proche des définitions d'espace vectoriel, d'anneau ou de corps (certaines questions sont réellement des enfonçages de portes ouvertes !!). L'intérêt de cet exercice est de montrer qu'il existe d'autres possibilités de construction de l'ensemble $\mathbb{C}$

1. A tout élément $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous associons la matrice $M(x, y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix}$$

   On appelle $\mathfrak{M}(2, -2)$ l'ensemble des matrices $M(x, y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   (a) Démontrer que $\mathfrak{M}(2, -2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension

   (b) Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2, -2)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   (c) Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p, q)$ a une structure de corps commutatif

   (d) Trouver un élément $A \in \mathfrak{M}(2, -2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$

2. Pour $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$ fixés, on considère cette fois ci, l'ensemble $\mathfrak{M}(p, q)$ des matrices $M(a, b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a + pb \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

   (a) Démontrer que $\mathfrak{M}(p, q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension

   (b) Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(p, q)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   (c) Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p, q)$ est un anneau commutatif et unitaire

   (d) Démontrer que si $p^2 - 4q < 0$, alors $\mathfrak{M}(p, q)$ a une structure de corps

8.8.2 Nombres complexes : calculs élémentaires

Exercice 13 :

Mettre sous la forme $a + bi$ les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1 + 3i}{2 - i}$
2. $\dfrac{3 + i}{3 - i} + \dfrac{2 + i}{2 - i}$

Exercice 14 :

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ est un nombre réel, alors que l'expression $(1 + i)^n - (1 - i)^n$ est un imaginaire pur

Exercice 15 :

p et q étant 2 nombres complexes tel que $|p| \neq 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par : $z = p\overline{z} + q$

Exercice 16 :

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\dfrac{1 + z}{z}$ soit réel *(On pourrait poser la même question pour « imaginaire pur »)*

Exercice 17 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on pose $z_0 = \dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

1. Exprimer z_0 sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels
2. Calculer z_0^2 et z_0^3 puis, z_0^{15}
3. Montrer que pour tout entier naturel n : $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$
4. **Application :** calculer z_0^{20}

Exercice 18 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :$z^2+2z+4=0$
2. On note z_A et z_B les deux racines de cette équation, z_A étant la racine dont la partie imaginaire est positive, et z_B l'autre ; calculer $|z_A|$ et $|z_B|$
3. Le plan est repéré par un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Nous appelons A, le point d'affixe z_A, B le point d'affixe z_B et C le point d'affixe $z_C=2$. Calculer $|z_A-z_B|$, $|z_B-z_C|$, $|z_C-z_A|$. En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 19 :

Trouver les racines carrées de $4ab+2\left(a^2-b^2\right)i$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Exercice 20 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2-(5-14i)\,x-2\,(5i+12)=0$
2. $x^2-2\left(1+ia^2\right)x+\left(1-a^4\right)=0$ avec $a\in\mathbb{R}$

Exercice 21 :

a étant réel et b complexe, résoudre l'équation d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ $z^2-2abz+b^2=0$

Exercice 22 :

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2-6\,(1-i)\,x-12i=0$
Montrer que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine

Exercice 23 :

Trouver l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i}\in\mathbb{R}$

Exercice 24 :

Pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$, on considère les nombres complexes suivants :

$$X=\frac{z+z'}{1+zz'}\qquad Y=i\frac{z'-z}{1+zz'}\qquad Z=\frac{1-zz'}{1+zz'}$$

1. Démontrer que $X^2+Y^2+Z^2=1$
2. Démontrer que X, Y et Z sont réels si et seulement si $z'=\overline{z}$

Exercice 25 :

Montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right|=1$.Etudier la réciproque

Exercice 26 :

1. Déterminer le module et l'argument de $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$
2. En exprimant de 2 manières différentes les racines carrées de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, calculer $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$

Exercice 27 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\tan(\theta)$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $z_2 = \dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ avec $\theta \neq 2k\pi$
3. $z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta)$

Exercice 28 :

1. Démontrer que $(\forall z \in \mathbb{C})(\forall z' \in \mathbb{C})$, $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$
2. Si $u^2 = zz'$ montrer que : $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z + z'}{2} - u\right| + \left|\dfrac{z + z'}{2} + u\right|$

8.8.3 Exponentielle complexe

Exercice 29 :

Soit $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$
Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T

Exercice 30 :

Soit $z_0 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. On pose $a = z_0 + z_0^4$ et $b = z_0^2 + z_0^3$.

1. Montrer que a et b sont les racines de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
2. On désigne par A, B et I les points d'affixe a,b et i. démontrer que le cercke de diamètre $[A, B]$ pase par I

Exercice 31 :

1. Montrer que Si $z \neq 1$ alors,$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.
2. En déduire la somme des racines n-*ièmes* de 1
3. Si $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$, comment factoriser P ?

Exercice 32 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On appelle ω une racine n-ième de 1, différente de 1. Evaluer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp}$ où $p \in \mathbb{Z}$ est fixé
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega^k$

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

Exercice 34 :

1. Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\rho>0$ et pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos\left(\alpha+k\beta\right)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin\left(\alpha+k\beta\right)$
2. Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=0$$

Exercice 35 :

On désigne par α et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation $x^2-2x+2=0$

1. Ecrire α^n et $\overline{\alpha}^n$ sous forme trigonométrique, et sous forme algébrique
2. Calculer $\prod\limits_{k=0}^{n}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)$

Exercice 36 :

α et β étant réels, trouver le module et l'argument de $\dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}}$

Exercice 37 :

Déterminer l'ensemble $\left\{n\in\mathbb{N}\text{ tel que }\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-\right\}$

Exercice 38 :

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha^5=1$ et $\alpha\neq1$. Montrer que
$$\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right)=\alpha\left(\alpha+1\right)$$

Exercice 39 :

On note $\alpha=e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$

8.8.4 Miscelleanous

AUTREMENT DIT : DES EXERCICES EN VRAC ! !

Exercice 40 :

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $\varphi\left(z\right)=\dfrac{z-i}{z+i}$
Quel est l'ensemble des complexes tels que

1. $\left|\varphi\left(z\right)\right|=1$
2. $\left|\varphi\left(z\right)\right|<1$
3. $\left|\varphi\left(z\right)\right|=k$ où $k\neq1$ et $k\geqslant0$

Exercice 41 :

Soit $z\in\mathbb{C}$ un nombre complexe de module r et d'argument θ

1. Calculer $\left|1+z\right|$ en fonction de r et de θ
2. En déduire $\left|1+z^2\right|$ en fonction de r et de θ

Exercice 42 :

Soit l'équation :

$$z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) = 0 \tag{8.1}$$

1. Montrer que l'équation (8.1) admet une solution imaginaire pure unique notée z_1. Calculer z_1
2. Déterminer les 2 autres solutions z_2 et z_3
3. On désigne M_1, M_2 et M_3 les solutions de (8.1) dans un repère orthonormé. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Exercice 43 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par : $f\,(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f\,(z) = z$
2. f est-elle bijective ? Et si oui, déterminer f^{-1}, sa bijection réciproque

Exercice 44 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par : $f\,(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f\,(z) = z$
2. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 45 :

Pour $a \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ en fonction de $\cot a$

Exercice 46 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P\,(X) = X^2 - 2X\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1$
   Chercher les racines, éventuellement complexes, de P
2. Soit $Q\,(X) = X^{2n} - 1$
   Chercher les racines de Q. En déduire que :
   $$Q\,(X) = \left(X^2 - 1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$
3. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$
4. Démontrer que $n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$
5. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Exercice 47 :

Dans tout le problème, nous appelons $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$

1. Démontrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe commutatif
2. Pour $u \in \mathcal{U}$ avec $u = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$), nous définissons l'application f_u de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} f_u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f_u\,(z) = \dfrac{az-b}{bz+a} \end{array}\right.$$

(a) Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier et que f_u est une bijection de E sur E

(b) Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$,, il existe un élément $z_0 \in E$ qui soit invariant par f_u

3. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections f_u, autrement dit : $\mathcal{B} = \{f_u \text{ où } u \in \mathcal{U}\}$

   (a) On considère l'application g de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$ définie par :

$$\begin{cases} g : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \quad u & \longmapsto & g(u) = f_u \end{cases}$$

   Quelles sont les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$?

   (b) Préciser $(f_u)^{-1}$ et montrer que $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$

   (c) Soit $u \in \mathcal{U}$ fixé. Trouver $v \in \mathcal{U}$ tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$

   (d) Montrer que l'identité de E, notée Id_E est un élément de $\mathcal{B}$ et quels sont les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$

   (e) Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$. Montrer que $f_u \circ f_v$ est un élément de $\mathcal{B}$

   (f) En déduire la structure de l'ensemble $(\mathcal{B}, \circ)$

   (g) Démontrer que $g : (\mathcal{U}, \times) \longrightarrow (\mathcal{B}, \circ)$ est un homomorphisme de groupe. Est-ce un isomorphisme ?

4. <u>Dans cette question, nous nous plaçons dans le cas particulier où $u = i$</u>

   (a) On appelle $\Gamma = \left\{z = e^{i\theta} \text{ où } \theta \in]0; \pi[\right\}$. Quelle est l'image de Γ par f_i ?

   (b) Soit $\theta_0 \in]0; \pi[$ fixé. On appelle $D(\theta_0) = \left\{\lambda e^{i\theta_0} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. Donner l'image de $D(\theta_0)$ par f_i