8.9 Quelques exercices corrigés

8.9.1 Nombres complexes : calculs élémentaires

Exercice 1 :

1. *Calculer de 2 manières différentes $(1+i)^8$; en déduire une expression de $S_1 = 2 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6$ et de $S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$*

   Calculons d'abord $(1+i)^8$

   ▷ Nous avons $(1+i)^8 = \left((1+i)^2\right)^4$. Or, $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, de telle sorte que $(1+i)^8 = 2^4 i^4 = 16$

   ▷ Cette fois ci, nous utilisons le binôme de Newton pour calculer $(1+i)^8$

   $$(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} i^k$$

   Il faut, ici, mettre de côté les termes de rang pair et les termes de rang impair ; en effet : $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = i(-1)^k$. D'où, nous avons :

   $$(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} i^k = \left(1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + 1\right) + i\left(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7\right)$$

   En identifiant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons :

   $$\begin{aligned} 2 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 &= 16 \\ C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 &= 0 \end{aligned}$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$*

   Nous allons regarder 2 situations :

   ▷ Si $a > 0$
   Alors, c'est une situation des plus classiques : $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$; nous avons alors $z \in \mathbb{R}$

   ▷ Si $a < 0$
   Alors, $z^2 = a \iff z^2 = i^2(-a)$ et nous avons $-a > 0$. Nous avons, à nouveau 2 racines : $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$; cette fois ci, z est imaginaire pur.

3. *Trouver dans $\mathbb{C}$, les complexes z et z' tels que :*

   $$\begin{cases} iz - 3z' = & -2i \\ (1+3i)\,z + 2iz' = & -1 + 3i \end{cases}$$

   En utilisant toute méthode que vous voulez *(substitution, addition, méthode de Cramer)*, on trouve $z = 1$ et $z' = i$

Exercice 3 :

Montrer que les seules bijections $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, laissant chaque réel invariant et telles que

$$(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(f(z+z') = f(z) + f(z') \text{ et } f(zz') = f(z)f(z')$$

sont toutes de la forme $f(z) = \overline{z}$ ou $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

▷ Une telle application est entièrement déterminée par $f(i)$
En effet, soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(z) = f(a+ib) = f(a) + f(ib) = f(a) + f(i)\,f(i)$$

Comme f laisse chaque réel invariant, nous avons $f(a) = a$ et $f(b) = b$, et donc $f(z) = a + bf(i)$

- ▷ Posons $f(i) = x_0 + iy_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
  Nous avons $1 = f(1) = f\left(-i^2\right) = f(i \times -i) = f(i) \times f(-i) = f(i) \times f(-1) \times f(i) = -\left(f(i)\right)^2$
  C'est à dire que $\left(f(i)\right)^2 = -1$. Donc $\left(x_0 + iy_0\right)^2 = -1$. Développons et nous avons :

  $$\left(x_0 + iy_0\right)^2 = x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0y_0 = -1$$

  En identifiant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons :

  $$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = & -1 \\ 2x_0y_0 = & 0 \end{cases}$$

  De $x_0y_0 = 0$, nous tirons $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Si $y_0 = 0$, alors $x_0^2 = -1$, ce qui est impossible. Donc, seul $x_0 = 0$, et si $x_0 = 0$ nous avons $y_0 = 1$ ou $y_0 = -1$ D'où nous tirons 2 solutions : $(x_0, y_0) = (0, +1)$ ou $(x_0, y_0) = (0, -1)$
- ▷ Ainsi, nous avons $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$
  - ⋆ Si $f(i) = i$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$
  - ⋆ Si $f(i) = -i$ alors $f(z) = \overline{z}$

Remarque
Il existe une autre application f telle que $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)\, f(z')$, c'est l'application nulle $\mathcal{O}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, fait correspondre $\mathcal{O}(z) = 0$; mais, ce n'est pas une bijection

Exercice 4 :

1. *Soit P un polynôme à coefficients réels, c'est à dire que $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $a_k \in \mathbb{R}$. Montrer que si z_0 est racine, il en est de même de $\overline{z_0}$*

   Nous avons donc $P(z_0) = 0$ et donc, en passant au conjugué, $\overline{P(z_0)} = 0$. Or, c'est quoi $\overline{P(z_0)}$?

   $$\overline{P(z_0)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0^k} = P\left(\overline{z_0}\right)$$

   Or, comme $\overline{P(z_0)} = 0$, nous avons aussi $P\left(\overline{z_0}\right) = 0$, et donc $\overline{z_0}$ est aussi racine de P
   Nous venons de montrer 2 choses :
   - ▷ Que si un polynome P est à coefficients réels, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
   - ▷ Que si un polynome P est à coefficients réels, si $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P
2. *Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; vérifier que $j^2 = \overline{j}$, puis que j est racine de $Q(x) = 1 + x + x^2$. En déduire une factorisation de $Q(x)$, puis que $j^3 = 1$*

   Le calcul montre que $j^2 = \overline{j}$.
   Comme le polynôme $Q(x) = 1 + x + x^2$ est à coefficients réels, alors, si u est racine de Q, $\overline{u}$ l'est aussi. par calcul, nous avons :

   $$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

   Ainsi j et donc $\overline{j}$ sont rracines de Q
   De $1 + j + j^2 = 0$, nous tirons $j^2 = -1 - j$, puis, en multipliant par j, $j^3 = -j - j^2 = 1$. j apparaît donc comme une racine cubique de 1

Exercice 6 :

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

On pose donc $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

- De la première égalité $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, nous tirons $|z|^2 = 1$ et donc $|z| = 1$, c'est à dire $x^2 + y^2 = 1$
- De la seconde égalité $|z| = |z-1|$, nous tirons

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \iff x^2 = (x-1)^2 \iff -2x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Et de $x^2 + y^2 = 1$, nous tirons $y^2 = \dfrac{3}{4}$, c'est à dire $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Il existe donc 2 nombres complexes z tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z-1|$; ce sont $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{z_0}$

Exercice 7 :

Montrer que pour tout complexe Z, il existe un élément $w = a + ib$ (avec a et b entiers relatifs) tel que $|Z - w| < 1$

En posant $Z = x + iy$ et $[t] =$ (entier le plus proche de t) [2], alors, $|t - [t]| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Soit $w = [x] + i[y]$; alors, $|Z - w|^2 = |(x - [x]) + i\,(y - [y])|^2 = (x - [x])^2 + (y - [y])^2 \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

Nous avons donc $|Z - w| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Exercice 8 :

Montrer que si $|u| = 1$, alors $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$

Il faut commencer par remarquer que si $|u| = 1$, alors $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$

Posons $Z = \dfrac{z - u\overline{z}}{1-u}$; il faut donc montrer que $\overline{Z} = Z$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z} - \overline{u}z}{1 - \overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\frac{u\overline{z} - u}{u}}{\frac{u-1}{u}} = \frac{u\overline{z} - u}{u - 1} = \frac{z - u\overline{z}}{1-u} = Z$$

Ce que nous voulions.

Exercice 9 :

Il faut faire cet exercice à fond, pour acquérir une dextérité dans les calculs

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$

   Remarquons que les coefficients étant réels, si z_0 est racine, alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.
   - On calcule donc le discriminant $\Delta = 4\cos^2\varphi - 4 = 4\left(\cos^2\varphi - 1\right) = -4\sin^2\varphi$
     Nous avons donc $\Delta \leqslant 0$ et une racine carrée de Δ est $\omega = 2i\sin\varphi$
   - Les racines de cette équation sont donc $z_0 = \dfrac{2\cos\varphi + 2i\sin\varphi}{2} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ et $\overline{z_0} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
2. $3x^2 + 2x + 2 = 0$

   Polynôme à coefficients réels de discriminant $\Delta = -20$; une racine carrée de Δ est donc $\omega = 2i\sqrt{5}$.
   Il y a donc 2 racines $x_0 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{5}}{6} = \dfrac{-1 + i\sqrt{5}}{3}$ et $\overline{x_0} = \dfrac{-1 - i\sqrt{5}}{3}$

2. Ne pas confondre "Entier le plus proche de t" et la partie entière de t

3. $z^2 - (3+2i)\,z - 1 + 3i = 0$

   Cette fois ci, ce n'est pas un polynôme à coefficients réels.

   $\trianglelefteq$ Calculons le discriminant :
   $$\Delta = (3+2i)^2 - 4\,(3i-1) = 9$$
   Δ admet donc 2 racines $\omega = 3$ et $\omega = -3$

   $\trianglelefteq$ La première racine est donc $z_1 = \dfrac{3+2i+3}{2} = 3+i$ et la seconde $z_2 = \dfrac{3+2i-3}{2} = i$

4. $(1-i)z^2 - (6-4i)z - 7i = 0$

   $\trianglelefteq$ Calculons le discriminant :
   $$\Delta = (6-4i)^2 + 28i\,(1-i) = 48 - 20i = 4\,(12-5i)$$
   $\trianglelefteq$ Recherchons les racines carrées de Δ

   Soit $\omega = x + iy$ l'une des 2 racines *(l'autre étant $-\omega$)*. Alors :

   $\star$ $\omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ et $|\omega|^2 = x^2 + y^2 = |\Delta|$

   Comme $|\Delta|^2 = 16\left[(12)^2 + (5)^2\right] = 16 \times 169 = 4^2 \times (13)^2$, nous avons $|\Delta| = 4 \times 13 = 52$

   $\star$ Nous avons donc le système à résoudre :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & 48 \\ x^2 + y^2 & = & 52 \\ 2xy & = & -20 \end{array}\right.$$
   D'où nous tirons $2x^2 = 100$ et $2y^2 = 4$ d'où $x = \pm 5\sqrt{2}$ et $y = \pm\sqrt{2}$

   $\star$ L'égalité $2xy = -20$ nous assure que x et y sont de signe contraire d'où nous obtenons commes racine : $\omega = 5\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}\,(5-i)$

   $\trianglelefteq$ les racines de l'équation sont donc :
   $$\left\{\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{6-4i+\left(5\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2\,(1-i)} = \dfrac{\left(6-4i+\left(5\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\right)(1+i)}{4} = \dfrac{\left(5+2\sqrt{2}\right)+i\left(1+3\sqrt{2}\right)}{2} \\ z_2 = \dfrac{6-4i-\sqrt{2}\,(5-i)}{2\,(1-i)} = \dfrac{\left(6-4i-\sqrt{2}\,(5-i)\right)(1+i)}{4} = \dfrac{\left(5-3\sqrt{2}\right)+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{2} \end{array}\right.$$

5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$

   Première remarque : c'est que $z^4 + z^2 + 1$ est un polynôme à coefficients réels, et que si z_0 en est la racine, il en est de même de $\overline{z_0}$

   $\trianglelefteq$ Faisons le changement de variables $Z = z^2$; l'équation devient $Z^2 + Z + 1 = 0$ dont les solutions sont $Z_1 = j$ et $Z_2 = j^2 = \overline{j}$

   $\trianglelefteq$ Il s'agit, maintenant, de résoudre les équations $z^2 = j$ et $z^2 = \overline{j}$

   $\star$ Résolvons $z^2 = j$

   Posons $z = x + iy$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et donc, nous avons le système :
   $$\left\{\begin{array}{rl} x^2 - y^2 = & \dfrac{-1}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \\ 2xy = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$
   D'où $2x^2 = \dfrac{-1}{2}$ et donc $x^2 = \dfrac{1}{4}$ et $x = \pm\dfrac{1}{2}$. De même, $y^2 = \dfrac{3}{4}$ et $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   De $2xy > 0$, nous tirons $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\star$ Résolvons maintenant $z^2 = \overline{j}$

   Posons $z = x + iy$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et donc, nous avons le système :
   $$\left\{\begin{array}{rl} x^2 - y^2 = & \dfrac{-1}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \\ 2xy = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

D'où $2x^2 = \frac{-1}{2}$ et donc $x^2 = \frac{1}{4}$ et $x = \pm\frac{1}{2}$. De même, $y^2 = \frac{3}{4}$ et $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

De $2xy < 0$, nous tirons $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\trianglelefteq$ Les racines de $z^4 + z^2 + 1$ sont donc :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_4 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut remarquer que $z_3 = \overline{z_1}$ et que $z_4 = \overline{z_2}$
Nous avons alors la factorisation $z^4 + z^2 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$

Une question complémentaire aurait pu être : factoriser $z^4 + z^2 + 1$ en 2 polynômes du second degré

6. *$iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle*

Soit x_0 la racine réelle de l'équation $iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$; alors, nous avons :

$$ix_0^3 + (1 - 2i)x_0^2 - (1 + i)x_0 - 2(1 - i) = 0 \Longleftrightarrow \left(x_0^2 - x_0 - 2\right) + i\left(x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2\right) = 0$$

Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que la parie réelle soit nulle et que la partie imaginaire soit nulle. Nous avons alors le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \\ x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Il est assez facile de résoudre l'équation du second degré $x_0^2 - x_0 - 2 = 0$ qui a pour soutions $x_0 = 2$ ou $x_0 = -1$. Il faut maintenant que ces solutions soient aussi solutions de l'équation $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0$
On vérifie, facilement, que ces 2 réels annulent $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2$ et donc que le polynôme $iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i)$ admet en fait 2 racines réelles et qu'il se factorise se factorise par le polynôme $z^2 - z - 2$. Il faut donc trouver $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i) = \left(z^2 - z - 2\right)(az + b)$$

On trouve facilement que $a = i$ et que $b = 1 - i$, et nous avons :

$$iz^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + i)z - 2(1 - i) = \left(z^2 - z - 2\right)(iz + 1 - i)$$

Les racines de ce polynômes sont donc : $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ et $z_3 = -(1 + i)$

Exercice 11 :

Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$

Nous avons $|z_1| = \sqrt{2}$ et donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Nous avons donc $\cos(\arg z) = \sin(\arg z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

La forme trigonométrique de z_1 est donc : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. $z_2 = -1 - i$

Nous avons $|z_2| = \sqrt{2}$ et donc $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Nous avons donc $\cos(\arg z) = \sin(\arg z) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

La forme trigonométrique de z_2 est donc : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

3. $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta$

   Il n'y a pas de souci, ici : $|z_3| = 1$.....Mais, rien n'est simple!! Sauf que, si vous connaissez bien les formules trigonométriques, vous avez : $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

   Donc, $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ qui est la forme trigonométrique de z_3

4. $z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$

   Tout d'abord, $|z_4| = \frac{\sqrt{2}}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

   D'autre part, $z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} = \frac{-\sqrt{2}\,(1-i)}{2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Et doonc, $z_4 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

   Nous avons donc $\cos(\arg z) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

   La forme trigonométrique de z_4 est donc : $z_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

5. $z_5 = \frac{3}{1-i}$

   Nous avons $z_5 = \frac{3}{1-i} = \frac{3\,(1+i)}{2} = \frac{3}{2} \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   Nous avons donc $\cos(\arg z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \frac{7\pi}{4}\ [2\pi]$

   La forme trigonométrique de z_5 est donc : $z_5 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 12 :

1. *A tout élément $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous associons la matrice $M(x, y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :*

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix}$$

   On appelle $\mathfrak{M}(2, -2)$ l'ensemble des matrices $M(x, y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   (a) *Démontrer que $\mathfrak{M}(2, -2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension*

   Cette question est d'un classique confondant.

   ▷ Premièrement, $\mathfrak{M}(2, -2) \neq \emptyset$

   En effet, $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_2$, la matrice nulle est dans $\mathfrak{M}(2, -2)$

   ▷ En second lieu, $\mathfrak{M}(2, -2)$ est stable par combinaison linéaire

   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $M(x, y) \in \mathfrak{M}(2, -2)$ et $M(x_1, y_1) \in \mathfrak{M}(2, -2)$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda M(x, y) + \mu M(x_1, y_1) &= \lambda \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x - 2y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ 2y_1 & x_1 - 2y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x_1 & -\lambda y - \mu y_1 \\ 2\lambda y + 2\mu y_1 & \lambda x - 2\lambda y + \mu x_1 - 2\mu y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x_1 & -\lambda y - \mu y_1 \\ 2(\lambda y + \mu y_1) & (\lambda x + \mu x_1) - 2(\lambda y - \mu y_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   La matrice $\lambda M(x, y) + \mu M(x_1, y_1)$ est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 2\beta & \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \lambda x + \mu x_1$ et $\beta = \lambda y + \mu y_1$.

   Donc $\lambda M(x, y) + \mu M(x_1, y_1) \in \mathfrak{M}(2, -2)$ et $\mathfrak{M}(2, -2)$ est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi, $\mathfrak{M}(2,-2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- ▷ Nous avons $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

  On vient de montrer que la famille de matrices $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}(2,-2)$
- ▷ Est ce que la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre de $\mathfrak{M}(2,-2)$?

  Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_2$; alors $x = 0$ et $y = 0$; c'est donc une famille libre de $\mathfrak{M}(2,-2)$
- ▷ La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est donc une base de $\mathfrak{M}(2,-2)$.

Ainsi $\dim \mathfrak{M}(2,-2) = 2$

(b) *Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2,-2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*

L'endomorphisme Φ à créer entre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$ est facile à faire :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}(2,-2) \\ \quad (x,y) & \longmapsto & \Phi[(x,y)] = M(x,y) \end{cases}$$

On montre très facilement que Φ est linéaire et que $\ker\Phi = \{\mathcal{O}_2\}$. Φ est donc un isomorphisme entre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$.

$\mathfrak{M}(2,-2)$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(c) *Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(2,-2)$ a une structure de corps commutatif*

- ▷ La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition des matrices ; elle le sera, en particulier dans $\mathfrak{M}(2,-2)$
- ▷ On sait déjà que $(\mathfrak{M}(2,-2), +)$ est un groupe abélien
- ▷ Démontrons que $(\mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\}, \times)$ est aussi un groupe abélien
  - ⋆ Tout d'abord, $\mathrm{Id}_2 = M(1,0) \in \mathfrak{M}(2,-2)$, et donc $\mathfrak{M}(2,-2) \neq \emptyset$
  - ⋆ Est-ce que $M(x,y) \in \mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ est une matrice inversible ?

    Il faut, pour cela, calculer $\det M(x,y)$ et démontrer qu'il est non nul. Or,

    $$\det M(x,y) = x(x-2y) + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 = (x-y)^2 + y^2$$

    Ainsi,

    $$\det M(x,y) = 0 \iff (x-y)^2 + y^2 = 0 \iff (x-y)^2 = y^2 = 0 \iff y = 0 \text{ et } x = 0$$

    Donc, toute matrice $M(x,y) \in \mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ est inversible.

    Par calcul, nous avons : $[M(x,y)]^{-1} = \dfrac{1}{\det M(x,y)} M(x-2y, -y)$
  - ⋆ <u>La multiplication des matrices est interne</u>

    Toujours par calcul, nous démontrons que $M(x,y)\times M(x_1,y_1) = M(xx_1 - 2yy_1, yx_1 + y_1x - 2yy_1)$ et que ce résultat montre que la multiplication est commutative.

  $\mathfrak{M}(2,-2)$ a donc une structure de corps commutatif

(d) *Trouver un élément $A \in \mathfrak{M}(2,-2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$*

Il faut donc trouver $A = M(x,y)$ telle que $A^2 = -\mathrm{Id}_2 = M(-1,0)$. Or,

$$A^2 = M(x,y)\times M(x,y) = M\left(x^2 - 2y^2, 2xy - 2y^2\right)$$

Nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = & -1 \\ 2xy - 2y^2 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2y^2 = & -1 \\ xy - y^2 = & 0 \end{cases}$$

- ▷ Si $y = 0$, alors, $x^2 = -1$, ce qui est impossible
- ▷ Supposons $y \neq 0$, alors, l'équation $xy = y^2$ nous donne $x = y$, et dans la première équation, nous obtenons $x^2 = 1$ et donc $x = \pm 1$.
  Nous obtenons alors 2 matrices solutions $M(1,1)$ et $M(-1,-1) = -M(1,1)$.
  Il existe donc deux matrices $A \in \mathfrak{M}(2,-2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$, l'une étant l'opposée de l'autre.

2. *Pour $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$ fixés, on considère cette fois ci, l'ensemble $\mathfrak{M}(p,q)$ des matrices $M(a,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :*

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

(a) *Démontrer que $\mathfrak{M}(p,q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension*

- ▷ Premièrement $\mathfrak{M}(p,q) \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{O}_2 = M(0,0)$ est un élépent de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ Montrons que $\mathfrak{M}(p,q)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $M(a,b) \in \mathfrak{M}(p,q)$ et $M(a_1,b_1) \in \mathfrak{M}(p,q)$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1) &= \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ qb_1 & a_1+pb_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a_1 & -\lambda b - \mu b_1 \\ q\lambda b + q\mu b_1 & \lambda a + p\lambda b + \mu a_1 + p\mu y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a_1 & -\lambda b - \mu b_1 \\ q(\lambda b + \mu b_1) & (\lambda a + \mu a_1) + p(\lambda b - \mu b_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  La matrice $\lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1)$ est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ q\beta & \alpha + p\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \lambda a + \mu a_1$ et $\beta = \lambda b + \mu b_1$.
  Donc $\lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1) \in \mathfrak{M}(p,q)$ et $\mathfrak{M}(p,q)$ est donc stable par combinaison linéaire.
- ▷

Ainsi, $\mathfrak{M}(p,q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- ▷ Toute matrice $M(a,b) \in \mathfrak{M}(p,q)$ peut s'écire :

$$M(a,b) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

  Ainsi, la famille de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix} \right\}$ est-elle une famille génératrice de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ On démontre facilement que $M(a,b) = \mathcal{O}_2$ si et seulement si $a = b = 0$ et donc, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre qui forme une base de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ Donc $\dim \mathfrak{M}(p,q) = 2$

(b) *Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(p,q)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

L'endomorphisme Φ à créer entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$ est tout aussi facile à faire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}(p,q) \\ (a,b) & \longmapsto & \Phi[(a,b)] = M(a,b) \end{array} \right.$$

On montre très facilement que Φ est linéaire et que $\ker \Phi = \{\mathcal{O}_2\}$. Φ est donc un isomorphisme entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(p,q)$.
$\mathfrak{M}(p,q)$ est donc isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(c) *Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p,q)$ est un anneau commutatif et unitaire*

- ▷ On sait déjà que la multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition des matrices
- ▷ On sait aussi que $(\mathfrak{M}(p,q),+)$ est un groupe abélien
- ▷ Il faut maintenant montrer que la multiplication des matrices dans $\mathfrak{M}(p,q)$ est interne, commutative et admet une unité
  - ⋆ Nous avons $M(1,0)=\mathrm{Id}_2\in\mathfrak{M}(p,q)$; la multiplication des matrices admet donc un neutre dans $\mathfrak{M}(p,q)$
  - ⋆ Montrons qu'elle est interne
    Tous calculs effectués, nous avons : $M(a,b)\times M(a_1,b_1)=M(aa_1-qbb_1, ba_1+b_1a+pbb_1)$
    Ces calculs montrent que la multiplication est interne et commutative

$\mathfrak{M}(p,q)$ est donc un anneau commutatif et unitaire

(d) *Démontrer que si $p^2-4q<0$, alors $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps*

Il suffit d'étudier les cas *(en fait les valeurs de p et q)* où toutes les matrices de $\mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ sont inversibles.
Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det M(a,b)=\begin{vmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{vmatrix}=a^2+pba+qb^2$$

La symétrie en a et b est remarquable. Appelons $P_b(a)$ le ploynôme du second degré $P_b(a)=a^2+pba+qb^2$ et cherchons les valeurs qui annulent ce polynôme.
Traditionnellement, le discriminant est $\Delta=p^2b^2-4qb^2=b^2\left(p^2-4q\right)$. Δ est du signe de p^2-4q. Ainsi,

- ▷ Si $p^2-4q<0$, il n'y a aucune racine et donc si $M(a,b)\in\mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ alors $\det M(a,b)\neq 0$ et toutes les matrices de $\mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ sont inversibles et $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps
- ▷ Si $p^2-4q=0$, il existe une racine double $a=-\dfrac{pb}{2}$ et donc les matrices $M\left(-\dfrac{pb}{2},b\right)=bM\left(-\dfrac{p}{2},1\right)$ ne sont pas inversibles et, sous l'hypothèse $p^2-4q=0$ $\mathfrak{M}(p,q)$ n'est pas un corps [3]
- ▷ Si $p^2-4q>0$, le raisonnement est le même puisque le polynôme P_b a deux racines.

Ainsi, si $p^2-4q<0$, alors $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps

Exercice 13 :

Mettre sous la forme $a+bi$ le nombre complexe $\dfrac{3+i}{3-i}+\dfrac{2+i}{2-i}$

En fait, il faut mettre sous forme algébrique un nombre de la forme $z=\dfrac{a}{\overline{a}}+\dfrac{b}{\overline{b}}$
Nous avons donc :

$$z=\frac{a}{\overline{a}}+\frac{b}{\overline{b}}=\frac{a^2}{|a|^2}+\frac{b^2}{|b|^2}=\frac{a^2|b|^2+b^2|a|^2}{|a|^2|b|^2}=\frac{ab\left(a\overline{b}+b\overline{a}\right)}{|a|^2|b|^2}$$

Nous avons $\dfrac{\left(a\overline{b}+b\overline{a}\right)}{|a|^2|b|^2}\in\mathbb{R}$; le reste découle d'un calcul
Nous avons donc : $\dfrac{3+i}{3-i}+\dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{7}{25}(7+5i)$

Exercice 14 :

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression $(1+i)^n+(1-i)^n$ est un nombre réel, alors que l'expression $(1+i)^n-(1-i)^n$ est un imaginaire pur

Nous avons, si $z=x+iy$, alors $z+\overline{z}$ réel et $z-\overline{z}$ imaginaire pur.

3. L'ensemble des matrices non inversibles de $\mathfrak{M}\left(2\sqrt{q},q\right)$ ou $\mathfrak{M}\left(-2\sqrt{q},q\right)$, avec $q>0$, forme un sous-espace vectoriel de dimension 1

Soit $u = 1 + i$, alors $\overline{u} = 1 - i$ et $\overline{u^n} = \overline{(1+i)^n}$. Or, $\overline{u^n} = \overline{u}^n$ et donc $\overline{(1+i)^n} = (1-i)^n$, de telle sorte que :

- ▷ $(1+i)^n + (1-i)^n = u^n + \overline{u^n}$ et donc $(1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel
- ▷ $(1+i)^n - (1-i)^n = u^n - \overline{u^n}$ et donc $(1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur

Exercice 15 :

p et q étant 2 nombres complexes tel que $|p| \neq 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par : $z = p\overline{z} + q$

De l'égalité $z = p\overline{z} + q$, nous tirons $\overline{z} = \overline{p}z + \overline{q}$, et donc :

$$z = p\overline{z} + q \Longleftrightarrow z = p\left(\overline{p}z + \overline{q}\right) + q \Longleftrightarrow z = |p|^2 z + p\overline{q} + q$$

D'où, nous tirons $z = \dfrac{p\overline{q} + q}{1 - |p|^2}$

Il est clair que si $|p| = 1$, il n'y a pas de solutions

Exercice 16 :

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel

Si nous appelons $Z = \dfrac{1+z}{z}$, nous avons $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $Z = \overline{Z}$

$\overline{Z} = \dfrac{1+\overline{z}}{\overline{z}}$ et nous avons

$$Z = \overline{Z} \Longleftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{1+\overline{z}}{\overline{z}} \Longleftrightarrow \overline{z} + |z|^2 = z + |z|^2 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

Ainsi, pour que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel, il faut et il suffit que $z \in \mathbb{R}^*$

Exercice 17 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on pose $z_0 = \dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$

1. *Exprimer z_0 sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels*

   Classiquement

$$z_0 = \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}} = z_0 = \frac{\left(5 + 3i\sqrt{3}\right)\left(1 + 2i\sqrt{3}\right)}{13} = \frac{-13 + 13i\sqrt{3}}{13} = -1 + i\sqrt{3}$$

2. *Calculer z_0^2 et z_0^3 puis, z_0^{15}*

   ▷ Il y a plusieurs façons de calculer z_0^2 : de manière algébrique ou en utilisant la forme trigonométrique

   ⋆ Trivialement, $z_0^2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2 = -2 - 2i\sqrt{3} = -2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$

   ⋆ En utilisant la forme trigonométrique. Nous avons $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$ et donc

$$z_0 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2j$$

   Où j est la racine cubique de -1 d'où $z_0^2 = 2^2 j^2 = 4\overline{j}$

   ▷ Le calcul de z_0^3 est donc évident : $z_0^3 = 2^3 j^3 = 8$

   ▷ Et $z_0^{15} = \left(z_0^3\right)^5 = 8^5$

3. *Montrer que pour tout entier naturel n : $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$*

   Nous avons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

   $$z_0^{3n+2} = z_0^{3n} \times z_0^2 = \left(z_0^3\right)^n \times (2j)^2 = \left(2^3\right)^n \times \left(2^2\overline{j}\right) = 2^{3n+2}\overline{j} = 2^{3n+2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{3n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

4. *Application : calculer z_0^{20}*

   Nous avons $20 = 3 \times 6 + 2$; il suffit donc de remplacer, dans la question précédente n par 6, et nous trouvons :

   $$z_0^{20} = -2^{19}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

Exercice 18 :

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :$z^2 + 2z + 4 = 0$*

   Première remarque : ce coefficent étant à coefficients réels, s'il existe des racines complexes, elles seront forcément conjuguées.
   On calcule donc le discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 = 4 \times 3 \times i^2$
   La première racine est donc $z_1 = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et la seconce $z_2 = \overline{z_1}$
2. *On note z_A et z_B les deux racines de cette équation, z_A étant la racine dont la partie imaginaire est positive, et z_B l'autre ; calculer $|z_A|$ et $|z_B|$*

   Nous avons donc $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et, clairement, $|z_A| = 2$, et comme $z_B = \overline{z_A}$, nous avons $|z_B| = |z_A| = 2$
3. *Le plan est repéré par un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Nous appelons A, le point d'affixe z_A, B le point d'affixe z_B et C le point d'affixe $z_C = 2$. Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_B - z_C|$, $|z_C - z_A|$. En déduire la nature du triangle ABC*

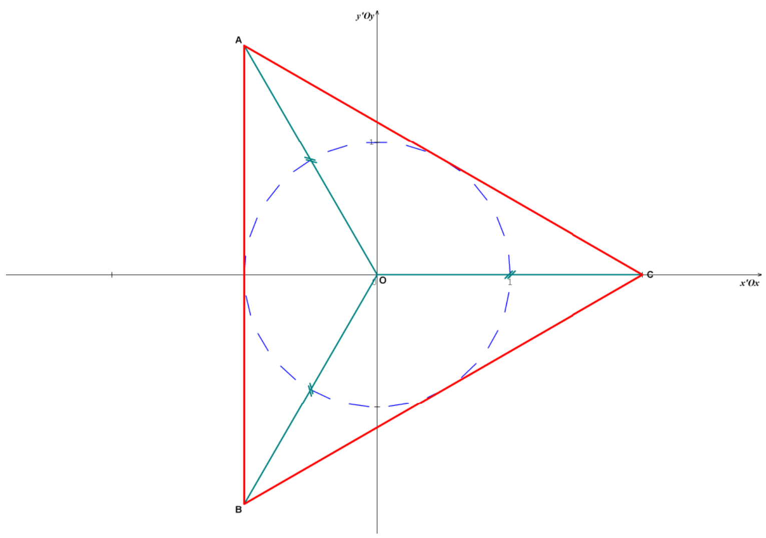

FIGURE 8.12 – Les images des affixes z_A, z_B et z_C

   Nous avons $z_A - z_B = -1 + i\sqrt{3} - \left(-1 - i\sqrt{3}\right) = 2i\sqrt{3}$ et donc $|z_A - z_B| = 2\sqrt{3}$.
   De même, $z_B - z_C = -1 - i\sqrt{3} - 2 = -3 - i\sqrt{3}$ et $|z_B - z_C| = \sqrt{(-3)^2 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   Et, pour terminer $z_C - z_A = 2 - \left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 3 - i\sqrt{3}$, et, bien évidemment, $|z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$
   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$. De la même manière, $AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$ et $BC = |z_C - z_B| = 2\sqrt{3}$.
   Nous avons $AB = AC = BC$ et le triangle ABC est équilatéral

Exercice 22 :

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 - 6(1-i)x - 12i = 0$ Montrer que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine

1. Résolution de l'équation $x^2 - 6(1-i)x - 12i = 0$
   Nous commençons par calculer le discriminant Δ

$$\Delta = 36(1-i)^2 - 4 \times -12i = 36(1-1-2i) + 48i = -24i$$

   - ⋆ Recherchons les racines carrée de Δ
     Soit $\omega = x + iy$ une telle racine. Alors, $\Delta = \omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -24i$ et $|\Delta| = |\omega^2| = x^2 + y^2 = 24$. Nous avons alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & 0 \\ 2xy = & -24 \\ x^2 + y^2 = & 24 \end{cases}$$

     D'où nous tirons $x = \pm 2\sqrt{3}$ et $y = \pm 2\sqrt{3}$. De l'équation $2xy = -24$, on tire que x et y sont de signe contraire. D'où $\omega = 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(1-i)$
   - ⋆ Les racines de l'équation sont donc données par

$$x_1 = \frac{6(1-i) + 2\sqrt{3}(1-i)}{2} = 3(1-i) + \sqrt{3}(1-i) = (1-i)\left(3+\sqrt{3}\right)$$

     et$x_2 = (1-i)\left(3-\sqrt{3}\right)$
2. On montre que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine
   Soit A le point d'affixe $x_1 = (1-i)\left(3+\sqrt{3}\right)$ et B le point d'affixe $x_2 = (1-i)\left(3-\sqrt{3}\right)$. Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$, et en passant aux affixes, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_2 = \lambda x_1$. Or, $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)} = 2 - \sqrt{3}$
   Les points O, A et B sont alignés

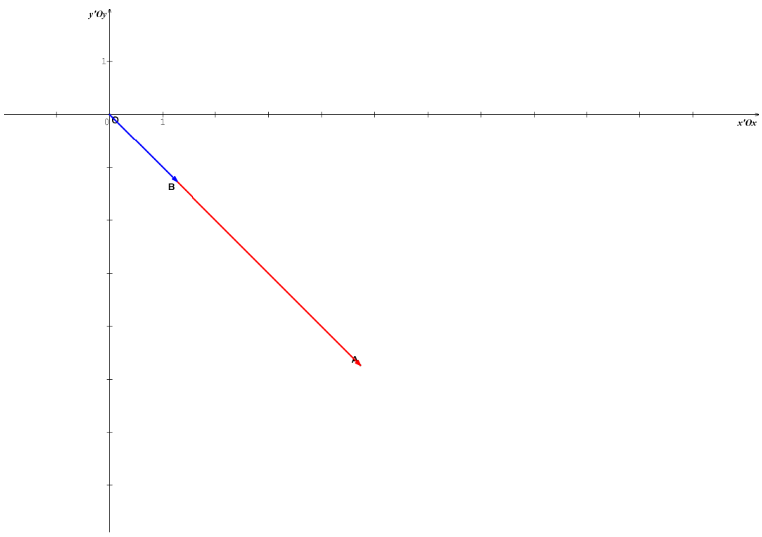

FIGURE 8.13 –

Exercice 23 :

Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$

Il faut donc trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{\dfrac{z+2i}{z-4i}} = \dfrac{z+2i}{z-4i}$

Or, $\overline{\dfrac{z+2i}{z-4i}} = \dfrac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i}$, et donc

$$\overline{\frac{z+2i}{z-4i}} = \frac{z+2i}{z-4i} \Longleftrightarrow \frac{z+2i}{z-4i} = \frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i}$$

Et nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{z+2i}{z-4i} = \frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i} &\Longleftrightarrow (z+2i)(\overline{z}+4i) = (\overline{z}-2i)(z-4i) \\
&\Longleftrightarrow |z|^2 + 4iz + 2i\overline{z} - 8 = |z|^2 - 4i\overline{z} - 2iz - 8 \\
&\Longleftrightarrow 4iz + 2i\overline{z} = -4i\overline{z} - 2iz \\
&\Longleftrightarrow 2z + \overline{z} = -2\overline{z} - z \\
&\Longleftrightarrow 3z + 3\overline{z} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \overline{z} = -z
\end{aligned}$$

z est donc imaginaire pur.
Ainsi, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.

Exercice 25 :

Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.Etudier la réciproque

Il est parfaitement clair que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = \left|\dfrac{u}{\overline{u}}\right| = 1$

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\dfrac{1+zi}{1-zi}\right| = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1+zi}{1-zi}\right| = 1 &\Longleftrightarrow \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\overline{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{\overline{1+zi}}{\overline{1-zi}}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1+\overline{zi}}{1-\overline{zi}}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1+\overline{z}\overline{i}}{1-\overline{z}\overline{i}}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}}\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(1+zi)(1-i\overline{z})}{(1-zi)(1+i\overline{z})} = 1 \\
&\Longleftrightarrow (1+zi)(1-i\overline{z}) = (1-zi)(1+i\overline{z}) \\
&\Longleftrightarrow 1 - i\overline{z} + iz + |z|^2 = 1 + i\overline{z} - iz + |z|^2 \\
&\Longleftrightarrow z = \overline{z}
\end{aligned}$$

Et donc $z \in \mathbb{R}$. Nous pouvons donc écrire que $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 26 :

1. *Déterminer le module et l'argument de $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = 1-i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$*

- ▷ Si $z_1 = \sqrt{3} + i$, nous avons $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ d'où $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$

  Il faut trouver $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, et on trouve $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *(modulo 2π)*
  Nous avons donc $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$
- ▷ Si $z_2 = 1 - i$, nous avons $|z_2| = \sqrt{2}$ d'où $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

  Il faut trouver $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et on trouve $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ *(modulo 2π)*
  Nous avons donc $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$
- ▷ Nous avons $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$, c'est à dire que $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$
- ▷ Nous avons aussi

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

- ▷ De là, nous déduisons que $\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{12}$ et des formules de trigonométrie *(qui sont, en fait, des formules de symétrie)*$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

  Ainsi, $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{12}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
  De même, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

2. *En exprimant de 2 manières différentes les racines carrées de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$*

   Si l'énoncé dit : « de deux manières », ceci sous-entend avec la méthode algébrique et la méthode trigonométrique.
   - ▷ Tout d'abord, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, et il est connu que $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$; ainsi, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$
   - ▷ De telle sorte qu'une racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ est $\omega_1 = e^{\frac{i\pi}{8}}$, et l'autre, $\omega_2 = -\omega_1 = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{8}+i\pi} = e^{\frac{9i\pi}{8}}$
   - ▷ La méthode algébrique consiste à prendre $\omega = x + iy$ une racine carrée de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$. Nous avons alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2 - y^2 = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \end{array}\right.$$

     En additionnant, nous obtenons : $2x^2 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

     De même, nous obtenons : $2y^2 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ d'où $y = \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

De l'égalité $2xy = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, nous voyons que x et y sont de même signe. Nous obtenons donc 2 racines :

- ⋆ Une première racine $\omega_1 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
- ⋆ Et une seconde racoine $\omega_2 = -\omega_1$

▷ De là, nous tirons que $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 27 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\tan(\theta)$ *avec* $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

   Nous avons $|z_1|^2 = |1+i\tan(\theta)|^2 = 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ et donc $|z_1| = \dfrac{1}{\cos\theta}$ *(nous avons* $\cos\theta > 0$ *puisque* $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$*)*

   Donc $z_1 = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

   C'est la forme trigonométrique de z_1

2. $z_2 = \dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ *avec* $\theta \neq 2k\pi$

   On tente de mettre z_2 sous forme algébrique :

$$z_2 = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{[1+\cos\theta+i\sin\theta]}{[1-\cos\theta+i\sin\theta]} \times \frac{[1-\cos\theta-i\sin\theta]}{[1-\cos\theta-i\sin\theta]}$$

   Appelons $N(\theta) = [1+\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta]$ et $D(\theta) = [1-\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta]$

   ▷ Calculons $D(\theta)$

$$\begin{aligned} D(\theta) = &\ [1-\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta] \\ = &\ (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ = &\ 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ = &\ 2 - 2\cos\theta \\ = &\ 2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

   Des formules trigonométriques *(arc double ou arc moitié)* :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

   nous tirons $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ et donc $1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   D'où $D(\theta) = 4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   ▷ Calculons $N(\theta)$

$$\begin{aligned} N(\theta) = &\ [1+\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta] \\ = &\ (1+\cos\theta)(1-\cos\theta) - i\sin\theta(1+\cos\theta) + i\sin\theta(1-\cos\theta) + \sin^2\theta \\ = &\ 1 - \cos^2\theta - i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta + i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ = &\ 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta \\ = &\ 2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) \end{aligned}$$

   Donc, $N(\theta) = 2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)$

   Des formules trigonométriques $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$ et $\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$, nous tirons $N(\theta) = 2\sin\theta\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

D'où $z_2 = \dfrac{N(\theta)}{D(\theta)} = \dfrac{2\sin\theta}{4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

De la formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nous obtenons $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ et donc $z_3 = \left(\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

▷ D'où :

⋆ Si $0 < \theta \leqslant \pi$, alors $0 < \dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \geqslant 0$ et donc, $|z_2| = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

La forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left(\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

⋆ Si $\pi < \theta < 2\pi$, alors $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < \pi$ et donc $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant 0$. Et nous avons $|z_2| = -\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où

$$z_2 = -\left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\pi}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Et la forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left|\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

⋆ Si $2\pi < \theta \leqslant 3\pi$, alors $\pi < \dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ et donc $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \geqslant 0$, parce que $\cos\dfrac{\theta}{2} \leqslant 0$ et $\sin\dfrac{\theta}{2} \leqslant 0$

Nous avons donc $|z_2| = \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où nous obtenons la forme trigonométrique de z_2

$$z_2 = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

⋆ Si $3\pi < \theta < 4\pi$, alors $\dfrac{3\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < 2\pi$ et donc $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant 0$. Et nous avons $|z_2| = -\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où

$$z_2 = -\left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\pi}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Et la forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left|\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

3. $z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta)$

Des formules d'arc double *(ou d'arc moitié)*, nous avons :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

Nous avons donc :

$$z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

▷ Si $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$ alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\theta}{2} \leqslant +\dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$

D'où la forme trigonométrique de z_3 est $z_3 = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

▷ Si $\pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi$ alors $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\theta}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \leqslant 0$ et $|z_3| = -2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $z_3 = -\left|2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| e^{i\pi}e^{i\frac{\theta}{2}}$

D'où la forme trigonométrique de z_3 est $z_3 = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Exercice 28 :

1. *Démontrer que* $(\forall z \in \mathbb{C})(\forall z' \in \mathbb{C})$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$

   Il suffit d'écrire que $|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)$ et $|z-z'|^2 = (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)$, puis de faire les calculs. Simple donc ! *(C'est, en fait, la formule du parallélogramme vue dans le chapitre du produit scalaire)*

2. *Si* $u^2 = zz'$ *montrer que :* $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right|$

   ▷ Dans un premier temps, nous élevons $\left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right|$ au carré.

   Tout d'abord :

$$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$$

   En posant $Z = \dfrac{z+z'}{2}$, nous avons $\left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right|^2 = |Z-u|^2 + |Z+u|^2$, et d'après la question précédente nous pouvons écrire $|Z-u|^2 + |Z+u|^2 = 2\left(|Z|^2 + |u|^2\right)$, de telle sorte que :

$$\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| = 2\left(\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + |u|^2\right) + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$$

   ▷ Nous avons :
   - ⋆ $\left|\dfrac{z+z'}{2}\right|^2 = \dfrac{1}{4}|z+z'|^2$
   - ⋆ $|u|^2 = \left|u^2\right| = |zz'| = |z|\,|z'|$
   - ⋆

$$\begin{aligned} 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| &= 2\left|\left(\frac{z+z'}{2}\right)^2 - u^2\right| \\ &= 2\left|\frac{(z+z')^2 - 4u^2}{4}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(z-z')^2\right| \\ &= \frac{1}{2}|z-z'|^2 \end{aligned}$$

   ▷ En faisant la synthèse, nous avons :

$$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = \frac{1}{2}|z+z'|^2 + 2|z|\,|z'| + \frac{1}{2}|z-z'|^2 = \frac{1}{2}\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right) + 2|z|\,|z'|$$

   Toujours d'après la question précédente, nous avons $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et donc

$$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2$$

   C'est à dire, comme les expressions sont toutes positives : $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right|$

8.9.2 Nombres complexes : l'exponentielle complexe

Exercice 29 :

Soit $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. *On pose* $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ *et* $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ *Calculer* $S+T$ *et* ST. *En déduire* S *et* T

Il faut d'abord remarquer que $\alpha^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{2i\pi} = 1$

- ▷ Tout d'abord, $S+T=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=\alpha\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5\right)$
  Or : $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5=\dfrac{1-\alpha^6}{1-\alpha}$ et $S+T=\alpha\times\dfrac{1-\alpha^6}{1-\alpha}=\dfrac{\alpha-\alpha^7}{1-\alpha}$
  D'où, $S+T=\dfrac{\alpha-1}{1-\alpha}=-1$
- ▷ Maintenant, $ST=\left(\alpha+\alpha^2+\alpha^4\right)\left(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6\right)=3+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=2$
- ▷ Ainsi, il nous est possible de calculer S et T : S et T sont solutions de l'équation du second degré :

$$Xr-(S+T)\,X+ST=0 \Longleftrightarrow X^2+X+2=0$$

  Le discriminant de cette équation est donné par $\Delta=1-4\times 2=-7$, et les racines de cette équation sont donc :

$$X_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\qquad X_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

- ▷ Maintenant qui de X_1 ou de X_2 est S ou T ?
  Il faut s'intéresser à la partie imaginaire. La partie imaginaire de S est donnée par :

$$\operatorname{Im}(S)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

  Nous avons, clairement, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)>0$, $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)>0$ et $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7})\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{7}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, de telle sorte que :

$$\operatorname{Im}(S)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

  D'autre part, nous avons $\dfrac{\pi}{7}<\dfrac{2\pi}{7}<\dfrac{\pi}{2}$ et donc $0<\sin\dfrac{\pi}{7}<\sin\dfrac{2\pi}{7}<1$ et donc, $\sin\dfrac{2\pi}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}>0$ et nous avons $\operatorname{Im}(S)>0$. D'où :

$$S=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\qquad T=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

Remarque

Comme $|\alpha|=1$ et que $\alpha^7=1$, nous avons $\alpha^6=\alpha^{-1}=\overline{\alpha}$, $\alpha^5=\left(\alpha^2\right)^{-1}=\overline{\alpha^2}$ et $\alpha^3=\left(\alpha^4\right)^{-1}=\overline{\alpha^4}$, de telle sorte que $S=\overline{T}$ et que donc $S+T=2\operatorname{Re}(S)$ et $ST=|ST|^2$

Exercice 31 :

1. *Montrer que Si $z\neq 1$ alors,$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\dfrac{z^n-1}{z-1}$. En déduire la somme des racines n-ièmes de 1*

   En nous intéressant à la somme des termes d'une suite géométrique, nous avons,pour tout $z\neq 1$

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{z^n-1}{z-1}$$

   Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$; alors, toutes les racines *n-ièmes* de 1 sont du type $\omega^k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k=0,\cdots,n-1$. Donc $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}$ représente la somme des n racines *n-ièmes* de 1. Ainsi

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\frac{\omega^n-1}{\omega-1}=\frac{1-1}{\omega-1}=0$$

   La somme des racines *n-ièmes* de 1 est donc nulle.

2. *Si $P(z)=1+z+z^2+\cdots+z^n$, comment factoriser P ?*

   Tout d'abord, comme $P(1)=n+1$, $z=1$ n'est pas racine de P, et donc, pour $z\neq 1$, nous avons $P(z)=\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$

Ainsi, $P(z) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} = 0$; les racines de P sont donc toutes les racines $n+1$-*ièmes* de 1 sauf 1. D'où la factorisation de P est donc :

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$$

Exercice 32 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On appelle ω une racine n-ième de 1 différente de 1. Evaluer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$

   Partant de l'expression $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$, nous pouvons en considérer la dérivée

$$P'(z) = \sum_{k=0}^{n} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,z^k$$

   D'autre part, nous avons :

$$P'(z) = \left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right)' = \frac{(n+1)\,z^n\,(z-1) - \left(z^{n+1}-1\right)}{(z-1)^2}$$

   Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k = P'(\omega) = \frac{(n+1)\,\omega^n\,(\omega-1) - \left(\omega^{n+1}-1\right)}{(\omega-1)^2}$$

   Comme $\omega^n = 1$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k = \frac{(n+1)\,(\omega-1) - (\omega-1)}{(\omega-1)^2} = \frac{n}{\omega-1}$$

   Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k = \frac{n}{\omega-1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp}$ *où $p \in \mathbb{Z}$ est fixé*

   Cette fois-ci, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,(\omega^p)^k = P'(\omega^p)$

   De l'étude que nous venons de faire, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp} = \frac{(n+1)\,(\omega^p)^n\,(\omega^p-1) - \left((\omega^p)^{n+1}-1\right)}{(\omega^p-1)^2}$

   De $(\omega^p)^n = 1$, nous tirons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp} = \frac{n}{\omega^p-1}$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$

   Clairement, nous avons $(1+\omega)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k$; donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k = (1+\omega)^n - \omega^n = (1+\omega)^n - 1$

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3=0$

On peut remarquer que $z\neq 1$ et $z\neq -1$, sinon, il est impossible de résoudre cette équation.
On fait un changement de variable $X=\dfrac{z+1}{z-1}\iff z=\dfrac{X+1}{X-1}$ et nous avons donc $X\neq 0$. L'équation devient alors : $X^3+\dfrac{1}{X^3}=0\iff\dfrac{X^6+1}{X^3}=0$

Donc $\dfrac{X^6+1}{X^3}=0\iff X^6=-1\iff X^6=e^{i\pi}$.

En posant $X=e^{i\theta}$, puisque $|X|=1$, nous avons $e^{6i\theta}=e^{i\pi}$ et donc $6\theta=\pi+2k\pi\iff\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$

Nous obtenons donc 6 valeurs X_k avec $X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ avec $k=0,\cdots,5$. Il existe donc 6 solutions à l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3=0$, elles sont toutes du type :

$$z_k=\frac{X_k+1}{X_k-1}=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}+1}{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}-1}=\frac{e^{i\frac{ki\pi}{3}}+e^{\frac{i\pi}{6}}}{e^{i\frac{ki\pi}{3}}-e^{\frac{i\pi}{6}}}\text{ avec }k=0,\cdots,5$$

Exercice 34 :

1. *Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\rho>0$ et pour $n\in\mathbb{N}$, calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)$

   Voici une question très calculatoire, même assez fastidieuse ! ! Mais, il faut le faire ! !

   ▷ Pour commencer, appelons $C=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)$ et $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)$. Alors :

$$\begin{aligned}
C+iS &= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)+i\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)+i\rho^k\sin(\alpha+k\beta)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\left(\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{i(\alpha+k\beta)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{i\alpha}e^{ik\beta}\\
&= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{ik\beta}\\
&= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\rho e^{i\beta}\right)^k\\
&= e^{i\alpha}\left(\frac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}\right)
\end{aligned}$$

   ▷ Nous avons $\dfrac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}=\dfrac{\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$. Nous avons donc :

$$e^{i\alpha}\left(\frac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}\right)=\frac{e^{i\alpha}\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$$

   Le dénominateur étant réel, nous allons nous intéresser au numérateur

▷ Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right) &= e^{i\alpha}\left(1-\rho e^{-i\beta}-\rho^n e^{in\beta}+\rho^{n+1}e^{i(n-1)\beta}\right)\\
&= e^{i\alpha}-\rho e^{i(\alpha-\beta)}-\rho^n e^{i(\alpha+n\beta)}+\rho^{n+1}e^{i(\alpha+(n-1)\beta)}\\
&= \cos\alpha+i\sin\alpha-\rho\cos(\alpha-\beta)-i\rho\sin(\alpha-\beta)-\rho^n\cos(\alpha+n\beta)\\
&\quad -i\rho^n\sin(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)+i\rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)\\
&= \left(\cos\alpha-\rho\cos(\alpha-\beta)-\rho^n\cos(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)\right)\\
&\quad +i\left(\sin\alpha-\rho\sin(\alpha-\beta)-\rho^n\sin(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)\right)
\end{aligned}$$

▷ D'où, en identifiants parties réelles et imaginaires :

- $C=\dfrac{\cos\alpha-\rho\cos(\alpha-\beta)-\rho^n\cos(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$
- $S=\dfrac{\sin\alpha-\rho\sin(\alpha-\beta)-\rho^n\sin(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$

2. *Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=0$*

Cette question est l'application de la question ci-dessus, avec $\alpha=\theta$, $\beta=\dfrac{2\pi}{n}$ et $\rho=1$.

Nous avons donc :

▷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{\cos\theta-\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{n}\right)-\cos(\theta+2\pi)+\cos\left(\theta+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$

Comme $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$ et $\cos\left(\theta+(n-1)\dfrac{2\pi}{n}\right)=\cos\left(\theta+2\pi-\dfrac{2\pi}{n}\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{n}\right)$

De là, nous déduisons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=0$

▷ De la même manière, nous démontrerions que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=0$

Exercice 35 :

On désigne par α et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation $x^2-2x+2=0$

Tout d'abord, c'est une équation du second degré à coefficients réels, et donc les racines sont conjuguées. Ainsi, si α est racine de l'équation $x^2-2x+2=0$, $\overline{\alpha}$ l'est aussi. On trouve très facilement :

$$\alpha=1+i \text{ et donc } \overline{\alpha}=1-i$$

Sous forme trigonométrique, $\alpha=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et donc $\overline{\alpha}=\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

1. *Ecrire α^n et $\overline{\alpha}^n$ sous forme trigonométrique, et sous forme algébrique*

▷ <u>Forme trigonométrique</u>

Cela ne pose pas de difficultés : $\alpha^n=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=\left(2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$, et donc $\overline{\alpha}^n=2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}$

▷ <u>Forme algébrique</u>

⋆ $\displaystyle(1+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}+i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

⋆ Et donc $\displaystyle(1-i)^n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k}-i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

2. *Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)$*

▷ Tout d'abord, $\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2^{\frac{k}{2}}e^{\frac{ik\pi}{4}}+2^{\frac{k}{2}}e^{\frac{-ik\pi}{4}}=2^{\frac{k}{2}}\times 2\cos\dfrac{k\pi}{4}$

- ▷ Et donc, pour $n=0$, nous avons $\prod_{k=0}^{0}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=2^0\times 2\cos 0=2$
- ▷ Pour $n=1$, nous avons $\prod_{k=0}^{1}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=\left(2^0\times 2\cos 0\right)\times\left(2^{\frac{1}{2}}\times 2\cos\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(\sqrt{2}\times 2\cos\frac{\pi}{4}\right)=$ $2\times 2=4$
- ▷ Pour $n=2$, nous avons $\prod_{k=0}^{2}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=\left(2^0\times 2\cos 0\right)\times\left(2^{\frac{1}{2}}\times 2\cos\frac{\pi}{4}\right)\times\left(2^{\frac{2}{2}}\times 2\cos\frac{2\pi}{4}\right)$

  Or, $\cos\frac{2\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2}=0$; et donc $\prod_{k=0}^{2}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=0$
- ▷ Ainsi, pour $n\geqslant 2$, nous avons $\prod_{k=0}^{n}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=0$

Exercice 36 :

α et β étant réels, trouver le module et l'argument de $\dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}}$

Nous utilisons la quantité conjuguée de $1+e^{i(\alpha+\beta)}$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} &= \frac{\left(1+e^{-i(\alpha+\beta)}\right)\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)}{1+e^{-i(\alpha+\beta)}1+e^{i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}}{1+e^{-i(\alpha+\beta)}+1+e^{i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{2\cos\alpha+2\cos\beta}{2+2\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

Le nombre $1+e^{i(\alpha+\beta)}$ est donc réel. Son argument est $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et son module est $\left|\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}\right|$

Exercice 37 :

Déterminer l'ensemble $\left\{n\in\mathbb{N}\text{ tel que }\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-\right\}$

- ▷ Tout d'abord, écrivons $\sqrt{3}+i$ sous sa forme trigonométrique.

  Nous avons $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$ et donc $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

  Nous avons donc, si θ est l'argument de $\sqrt{3}+i$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$, c'est à dire :

  $$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\text{ avec }k\in\mathbb{Z}$$

  Donc, nous avons : $\sqrt{3}+i=2e^{\frac{i\pi}{6}}$
- ▷ D'où, $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^ne^{\frac{in\pi}{6}}$
- ▷ Donc $\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-$ si et seulement si $\frac{in\pi}{6}=\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est à dire si $n=6+12k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

En conclusion, $\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-$ si et seulement si $n\equiv 6\,[12]$

Exercice 38 :

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha^5=1$ et $\alpha\neq 1$. Montrer que $\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right)=\alpha(\alpha+1)$

Tout d'abord, il est bon de remarque que α est une racine cinquième de 1 et que nous avons :

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

Pour résoudre l'exercice, nous allons, très simplement, développer. Commençons par les deux premières parenthèses :

$$\begin{aligned}
\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right) &= \alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+\alpha+1\\
&= \left(1+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^4\right)+\left(\alpha^2+\alpha+\alpha^3+\alpha+1\right)\\
&= -\alpha+\left(\alpha^2+2\alpha+\alpha^3+1\right)\\
&= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\\
&= -\alpha^4
\end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned}
\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right) &= -\alpha^4\left(\alpha^4+\alpha+1\right)\\
&= -\alpha^8-\alpha^5-\alpha^4\\
&= -\alpha^3-1-\alpha^4\\
&= \alpha+\alpha^2\\
&= \alpha\left(1+\alpha\right)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 39 :

On note $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$

Il nous faut remarquer que $\alpha^5 = 1$ et que, comme tout à l'heure, nous avons $1+\alpha+\alpha^2 = -\alpha^3-\alpha^4$, de telle sorte que :

$$\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n = \left(-\alpha^3\right)^n\left(1+\alpha\right)^n = \left(-1\right)^n\alpha^{3n}\left(1+\alpha\right)^n$$

- ▷ Regardons de manière plus précise $1+\alpha$.

  Nous avons $1+\alpha = 1+e^{\frac{2i\pi}{5}} = \left(1+\cos\dfrac{2\pi}{5}\right)+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

  Or, des identités $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nous avons :

$$\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5}+2i\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{\pi}{5}e^{\frac{i\pi}{5}}$$

- ▷ Donc :

$$\begin{aligned}
\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n &= \left(-1\right)^n\alpha^{3n}\left(1+\alpha\right)^n\\
&= \left(-1\right)^n e^{\frac{6in\pi}{5}}\left(2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\right)e^{\frac{in\pi}{5}}\\
&= \left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}e^{\frac{7in\pi}{5}}\\
&= \left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{7n\pi}{5}+i\sin\frac{7n\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

- ▷ Ainsi, la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$ est donc $\left(-1\right)^n 2^n\cos^n\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{7n\pi}{5}$, tout comme la partie réelle est $\left(-1\right)^n 2^n\cos^n\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{7n\pi}{5}$

8.9.3 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $\varphi\left(z\right) = \dfrac{z-i}{z+i}$. Quel est l'ensemble des complexes tels que :

1. $\left|\varphi\left(z\right)\right| = 1$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Longleftrightarrow |z+i| = |z-i|$

   En identifiant le plan à $\mathbb{C}$ et en posant A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, rechercher les complexes z tels que $|z+i| = |z-i|$, c'est rechercher les points M d'affixe z tels que $MA = MB$; c'est à dire que l'ensemble des points M du plan est la médiatrice du segment $[A;B]$, c'est à dire l'axe des réels ; cf figure 8.14

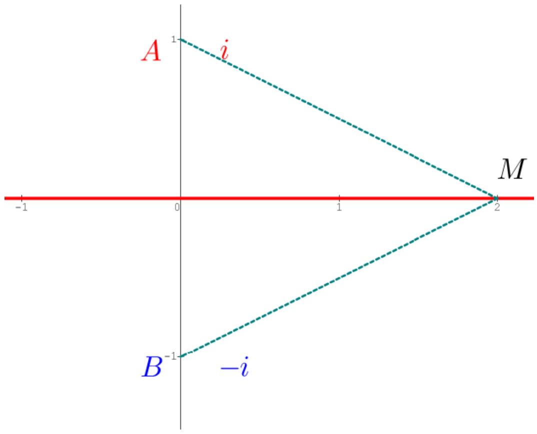

FIGURE 8.14 – Visualisation de la question 1

2. $|\varphi(z)| < 1$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1 \Longleftrightarrow |z-i| < |z+i|$

   En identifiant le plan à $\mathbb{C}$ et en posant A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, rechercher les complexes z tels que $|z-i| < |z+i|$, c'est rechercher les points M d'affixe z tels que $MA < MB$; c'est à dire que l'ensemble des points M du demi-plan des points d'ordonnée strictement positive ; cf figure 8.15

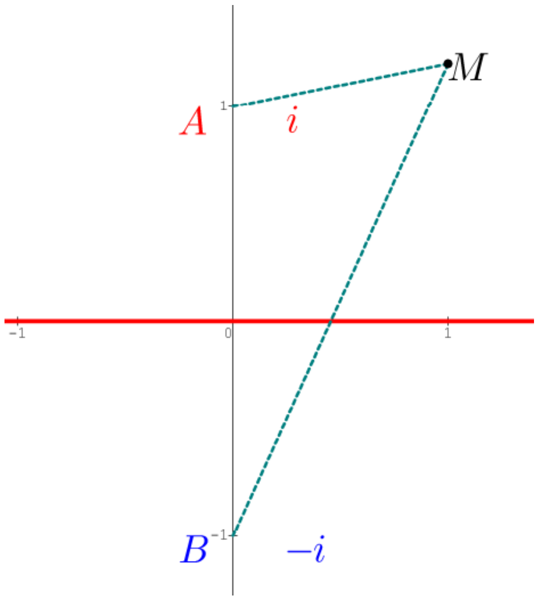

FIGURE 8.15 – Visualisation de la question 2

3. $|\varphi(z)| = k$ *où* $k \neq 1$ *et* $k \geqslant 0$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = k \Longleftrightarrow |z-i| = k\,|z+i| \Longleftrightarrow |z-i|^2 = k^2\,|z+i|^2$

En posant $z = x + iy$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|z-i|^2 = k^2\,|z+i|^2 &\iff |x+iy-i|^2 = k^2\,|x+iy+i|^2 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 = k^2x^2 + k^2\,(y+1)^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = k^2x^2 + k^2y^2 + 2k^2y + k^2 \\
&\iff \left(1-k^2\right)x^2 + \left(1-k^2\right)y^2 - 2\left(1+k^2\right)y + \left(1-k^2\right) = 0 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}y = -1 \text{ car } k \neq 1 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - \frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)^2} = -1 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = -1 + \frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)^2} \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = \frac{\left(1+k^2\right)^2 - \left(1-k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)^2} \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = \frac{4k^2}{\left(1-k^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = k$ apparaît donc comme un cercle de centre $\Omega\left(0, \dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{2k}{|1-k^2|}$

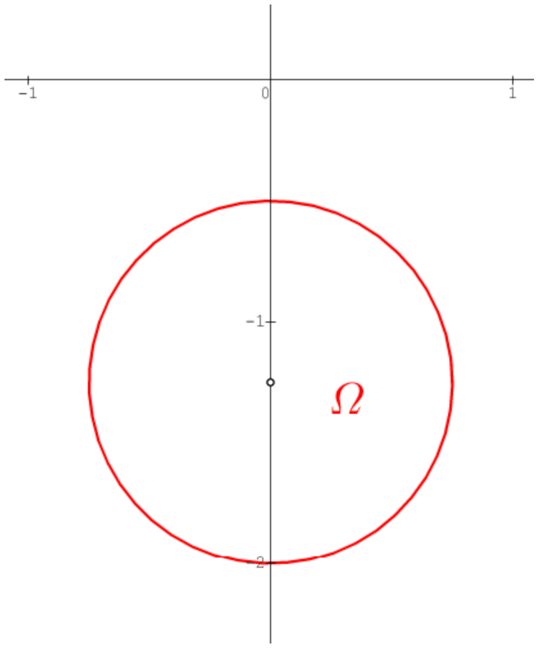

FIGURE 8.16 – Visualisation de la question 3 pour $k = 3$ où nous avons $\Omega\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$ et $R = \dfrac{3}{4}$

Exercice 41 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module r et d'argument θ

1. *Calculer $|1+z|$ en fonction de r et de θ*

   On écrit donc $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, et donc $1 + z = 1 + r\cos\theta + ir\sin\theta$.
   D'où $|1+z| = \sqrt{(1+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{1 + 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2 + 1 + 2r\cos\theta}$
   En conclusion, $|1+z| = \sqrt{r^2 + 1 + 2r\cos\theta}$

2. *En déduire $\left|1+z^2\right|$ en fonction de r et de θ*

   Si $z = re^{i\theta}$, alors $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ et donc $1+z^2 = 1+r^2\cos 2\theta + ir^2\sin 2\theta$.
   D'où
   $$\begin{aligned}\left|1+z^2\right| &= \sqrt{\left(1+r^2\cos 2\theta\right)^2 + r^4\sin^2 2\theta}\\ &= \sqrt{1+2r^2\cos 2\theta + r^4\cos^2 2\theta + r^4\sin^2 2\theta}\\ &= \sqrt{r^4+1+2r^2\cos 2\theta}\end{aligned}$$
   En conclusion, $\left|1+z^2\right| = \sqrt{r^4+1+2r^2\cos 2\theta}$

Exercice 42 :

Soit l'équation :
$$z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) = 0 \tag{8.2}$$

1. *Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure unique notée z_1. Calculer z_1*

   On suppose donc que $z_1 = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation devient :
   $$\begin{gathered}(\lambda i)^3 - (6+3i)\,(\lambda i)^2 + (9+12i)\,(\lambda i) - 9\,(2+3i) = 0\\ \Longleftrightarrow\\ -\lambda^3 i + \lambda^2\,(6+3i) + (-12\lambda + 9\lambda i) - 9\,(2+3i) = 0\\ \Longrightarrow\\ \left(6\lambda^2 - 12\lambda - 18\right) + i\left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27\right) = 0\end{gathered}$$
   et
   $$\left(6\lambda^2 - 12\lambda - 18\right) + i\left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 6\lambda^2 - 12\lambda - 18 = & 0\\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = & 0\end{cases}$$
   Résolvons $6\lambda^2 - 12\lambda - 18 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
   Tout calculs faits $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ si et seulement si $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$.
   Seule $\lambda = 3$ est aussi solution de $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$ et donc $z_1 = 3i$

2. *Déterminer les 2 autres solutions z_2 et z_3*

   Voilà donc une question classique !!
   - ▷ Pour la résoudre, nous commençons par factoriser par $z - 3i$
   $$\begin{gathered}(z-3i)\left(az^2+bz+c\right) = z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i)\\ \Longleftrightarrow\\ az^3 + (b-3ia)\,z^2 + (c-3ib)\,z - 3ic = z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i)\end{gathered}$$
     Puis, nous identifions et nous avons :
   $$\begin{cases} a = & 1\\ b - 3ia = & -(6+3i)\\ c - 3ib = & 9+12i\\ -3ic = & -9\,(2+3i)\end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = & 1\\ b = & -6\\ c = & 9-6i = 3\,(3-2i)\end{cases}$$
     Ainsi, nous avons : $z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) = (z-3i)\left(z^2 - 6z + 3\,(3-2i)\right)$
   - ▷ Pour connaître les autres racines, nous résolvons l'équation $z^2 - 6z + 3\,(3-2i) = 0$
     - ⋆ Nous calculons le discriminant : $\Delta = 36 - 12\,(3-2i) = 24i$
     - ⋆ Il faut donc, maintenant, rechercher les racines carrées de $24i$
       Soit $\omega = x + iy$ l'une de ces racines carrées *(L'autre sera $-\omega$)*. Alors :
   $$\begin{cases} \omega^2 = & x^2 - y^2 + 2ixy = 24i\\ |\omega|^2 = & x^2 + y^2 = |24i| = 24\end{cases}$$

Nous avons donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & 0 \\ x^2 + y^2 = & 24 \\ xy = & 12 \end{cases}$$

D'où nous trouvons $x = y = 2\sqrt{3}$ ou $x = y = -2\sqrt{3}$; nous avons donc $\omega = 2\sqrt{3}\,(1+i)$

⋆ Les racines z_2 et z_3 sont donc :

$$z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = 3 + \sqrt{3}\,(1+i) \qquad z_3 = \frac{6 - 2\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = 3 - \sqrt{3}\,(1+i)$$

3. *On désigne M_1, M_2 et M_3 les solutions de l'équation dans un repère orthonormé. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral*

La figure 8.17 donne une visualisation de la question posée.

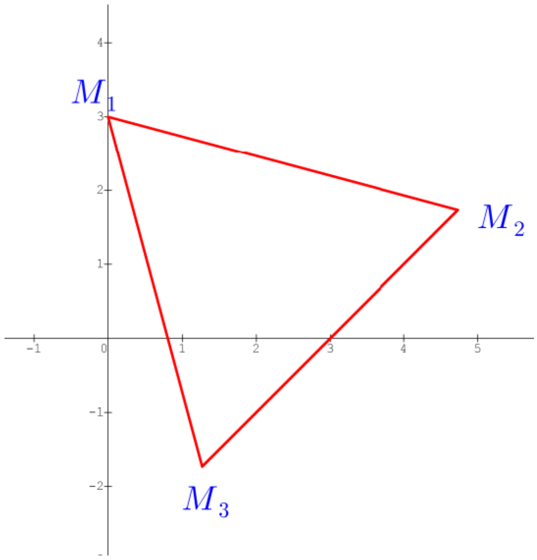

FIGURE 8.17 – Visualisation du triangle équilatéral

Pour démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral il faut vérifier que $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$

▷ Nous avons

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \left|3i - \left(3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-3\right)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

▷ Pour $M_1M_3 = |z_1 - z_3| = \left|3i - \left(3 - \sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+3\right)^2} = 2\sqrt{6}$

▷ Et pour finir,

$$M_2M_3 = |z_2 - z_3| = \left|\left(3 + \sqrt{3}\,(1+i)\right) - \left(3 - \sqrt{3}\,(1+i)\right)\right| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

Et nous avons donc $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$, c'est à dire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Exercice 43 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1. *Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$*

Nous avons $f(z) = z \iff \dfrac{z+i}{z-i} = z$, et pour $z \neq i$, $z + i = z(z-i)$

Il nous faut donc résoudre l'équation du second degré $z^2 - (1+i)\,z - i = 0$

- ▷ Le discriminant est donné par $\Delta = (1+i)^2 + 4i = 6i$ dont une racine carrée est $\omega = \sqrt{3}\,(1+i)$
- ▷ Les 2 racines sont donc :

$$z_1 = \frac{(1+i)+\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) \qquad z_2 = \frac{(1+i)-\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$$

Il existe donc 2 points fixes à f

2. *f est-elle bijective ? Et si oui, déterminer f^{-1}, sa bijection réciproque*

   Pour montrer que f est bijective, il faut montrer qu'elle injective et surjective. Le calcul de f^{-1} se fait en même temps

   (a) Etude de l'injectivité

   Soient $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1+i}{z_1-i} = \frac{z_2+i}{z_2-i} &\iff (z_1+i)(z_2-i) = (z_1-i)(z_2+i) \\
&\iff z_1z_2 - iz_1 + iz_2 + 1 = z_1z_2 + iz_1 - iz_2 + 1 \\
&\iff 2iz_1 = 2iz_2 \\
&\iff z_1 = z_2
\end{aligned}$$

   f est donc injective

   (b) Etude de la surjectivité

   Soit $C \in \mathbb{C}$; existe-t-il $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $f(z) = C$, c'est à dire tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = C$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = C &\iff z+i = C(z-i) \\
&\iff z+i = Cz - iC \\
&\iff z(1-C) = -iC - i \\
&\iff \text{Si } C \neq +1 \quad z = \frac{i(C+1)}{C-1}
\end{aligned}$$

   Ainsi, si $C \neq 1$, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $f(z) = C$.

   (c) Bijection

   f est donc bijective de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{+1\}$

   (d) Bijection réciproque f^{-1}

   Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ C & \longmapsto & f^{-1}(C) = \dfrac{i(C+1)}{C-1} \end{array}\right.$$

Exercice 44 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

1. *Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$*

   Assez facile ! ! Ils sont tels que $z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ Or, tous calculs faits, nous avons :

$$z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \iff z^2 = 1 \iff z = 1 \text{ ou } z = -1$$

   Les seuls points fixes de f sont donc $z = 1$ et $z = -1$

2. *f est-elle injective ? Est-elle surjective ?*

   - ▷ f ne peut pas être injective puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, nous avons $f(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$; en particulier, nous avons $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

▷ <u>f est surjective</u> puisque, pour tout $C \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=C \Longleftrightarrow z+\frac{1}{z}=2C \Longleftrightarrow z^2-2Cz+1=0$$

L'équation $z^2-2Cz+1=0$ a donc deux solutions z_1 et z_2. Chaque élément $C \in \mathbb{C}$ a donc 2 antécédents.

f n'est donc pas injective, mais est surjective

Exercice 45 :

Pour $a \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ en fonction de $\cot a$

Nous avons $\cot a + i = \dfrac{\cos a}{\sin a} + i = \dfrac{1}{\sin a}(\cos a + i \sin a)$ et donc

$$(\cot a+i)^n=\left(\frac{1}{\sin a}\right)^n(\cos a+i\sin a)^n=\left(\frac{1}{\sin a}\right)^n(\cos na+i\sin na)$$

De telle sorte que $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ apparaît comme la partie imaginaire de $(\cot a+i)^n$. Or :

$$(\cot a+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k}$$

⋆ Si n est pair, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}(\cot a)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}i^{2k-1}(\cot a)^{n-2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k(\cot a)^{n-2k}+i\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}\end{aligned}$$

De telle sorte que si n est pair, $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}$

⋆ Si n est impair, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}(\cot a)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}i^{2k-1}(\cot a)^{n-2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k(\cot a)^{n-2k}+i\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}\end{aligned}$$

De telle sorte que si n est impair, $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}$

Exercice 46 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=X^2-2X\cos\dfrac{k\pi}{n}+1$. Chercher les racines, éventuellement complexes, de P*

   C'est une question qui ne pose pas de difficulté ; commençons par calculer le discriminant :

   $$\Delta=\cos^2\frac{k\pi}{n}-1=-\sin^2\frac{k\pi}{n}=\left(i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

   Il y a donc 2 racines z_1 et z_2 complexes et conjuguées à cette équation :

   $$z_1=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}=e^{\frac{ik\pi}{n}} \text{ et } z_2=e^{\frac{-ik\pi}{n}}$$

2. (a) *Soit $Q(X) = X^{2n} - 1$. Chercher les racines de Q.*

   Les racines de Q sont les racines $2n$-ièmes de 1.

   Elles sont donc du type $\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \dots, 2n-1$

   (b) *En déduire que : $Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$*

   De la question précédente, nous pouvons factoriser $Q(X)$. Nous avons donc :

$$Q(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

   Nous pouvons remarquer que nous pouvons diviser ce produit :

$$Q(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) (X - e^{\pi}) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

   Donc $Q(X) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$

   Comme $\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}\right)$, nous pouvons écrire :

$$Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}\right)$$

   Or, $X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} = X - e^{\frac{i2n\pi}{n}} e^{\frac{-ik\pi}{n}} = X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}$
   D'où :

$$Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

   Ce que nous voulions.

3. *Démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$*

   Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^j + \cdots + X^{n-1}$, alors, pour $X \neq 1$, nous avons :

$$P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^j + \cdots + X^{n-1} = \frac{X^n - 1}{X - 1}$$

   Et donc :

$$P\left(X^2\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2} = \frac{X^{2n} - 1}{X^2 - 1} = \frac{\left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)}{X^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\right.$$

   Ce que nous voulions

4. *Démontrer que* $n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n}$

En faisant $X = 1$ dans l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$, nous obtenons :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} 2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

Or, les formules trigonométriques donnent : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \iff 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, et donc $1 - \cos\frac{k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n}$ D'où, bien sûr :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

5. *Démontrer que* $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Nous avons : $\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\frac{k\pi}{2n}$

Nous avons, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 < \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{k\pi}{2n} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ et donc, $0 < \sin\frac{k\pi}{2n} < 1$, et donc, en prenant la racine carrée $\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = \sin\frac{k\pi}{2n}$. D'où :

$$\sqrt{n} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = \sqrt{4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\frac{k\pi}{2n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

D'où, bien entendu, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Exercice 47 :

Dans tout le problème, nous appelons $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *et* $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$

1. *Démontrer que* $(\mathcal{U}, \times)$ *est un groupe commutatif*

On démontrera que $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
- ▷ Tout d'abord $\mathcal{U} \neq \emptyset$ puisque $1 \in \mathcal{U}$
- ▷ Soit $z \in \mathcal{U}$ et $z_1 \in \mathcal{U}$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tels que $z = e^{i\theta}$ et $z_1 = e^{i\theta_1}$. Alors :

$$z \times (z_1)^{-1} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta_1} = e^{i(\theta-\theta_1)}$$

Comme $\left|e^{i(\theta-\theta_1)}\right| = 1$, nous avons $z \times (z_1)^{-1} \in \mathcal{U}$
- ▷ En conclusion, $(\mathcal{U}, \times)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et est donc aussi commutatif.

2. *Pour* $u \in \mathcal{U}$ *avec* $u = a + ib$ $(a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R})$, *nous définissons l'application* f_u *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *par :*

$$\begin{cases} f_u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & f_u(z) = \dfrac{az - b}{bz + a} \end{cases}$$

Il y a une remarque qu'il est possible de faire : pour tout $u \in \mathcal{U}$, $f_u = f_{-u}$.

En effet, si $u \in \mathcal{U}$ avec $u = a + ib$, nous avons $-u = -a - ib$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f_{-u}(z) = \frac{-az+b}{-bz-a} = -\frac{-az+b}{bz+a} = \frac{az-b}{bz+a} = f_u(z)$$

(a) i. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier*

Nous avons à étudier 2 cas : $b = 0$ et $b \neq 0$

⋆ Si $b = 0$, alors, comme $a^2 + b^2 = 0$, $a = 1$ ou $a = -1$

- Si $a = 1$, alors $f_1(z) = z$, c'est l'identité de $\mathbb{C}$, et f_1 est bien définie sur E
- Si $a = -1$, alors $f_{-1}(z) = \frac{-z}{-1}$, c'est aussi l'identité de $\mathbb{C}$, et donc f_{-1} est bien définie sur E
- Nous retrouvons, dans cette question la propriété $f_u = f_{-u}$

⋆ Si $b \neq 0$, alors, f_u n'est pas définie pour $z_0 = \frac{-a}{b}$. Comme $\frac{-a}{b} \in \mathbb{R}$, nous avons $\mathrm{Im}(z_0) = 0$. Comme $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $z_0 \notin E$ et donc, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier

ii. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$ que f_u est une bijection de E sur E*

▷ Montrons que f_u est une surjection de E sur E

Soit $Z \in E$ avec $Z = x + iy$ et $y > 0$. Existe-t-il $z \in E$ tel que $f_u(z) = Z$?
Si ce $z \in E$ existe, alors nous avons :

$$Z = f_u(z) = \frac{az-b}{bz+a} \iff z = \frac{aZ+b}{-bZ+a}$$

Il faut maintenant montrer que $z \in E$, et donc démontrer que $\mathrm{Im}(z) > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{aZ+b}{-bZ+a} &= \frac{a(x+iy)+b}{-b(x+iy)+a} \\
&= \frac{(ax+b)+iay}{(a-bx)-iby} \\
&= \frac{((ax+b)+iay)((a-bx)+iby)}{((a-bx)-iby)((a-bx)+iby)} \\
&= \frac{\left((ax+b)(a-bx)-aby^2\right)+i(by(ax+b)+ay(a-bx))}{(a-bx)^2+b^2y^2}
\end{aligned}$$

Comme le dénominateur $(a-bx)^2+b^2y^2$ est positif, il faut donc démontrer que $by(ax+b)+ay(a-bx) > 0$. Par calcul, nous avons :

$$by(ax+b)+ay(a-bx) = byax + b^2y + a^2y - aybx = y\left(a^2+b^2\right) = y$$

Comme $y > 0$, nous avons le résultat.
Et donc $z \in E$ et, pour tout $u \in \mathcal{U}$ que f_u est une surjection de E sur E

▷ Montrons que f_u est une injection de E sur E

Soient donc $z \in E$ et $z_1 \in E$ tels que $f_u(z) = f_u(z_1)$, c'est à dire tels que $\frac{az-b}{bz+a} = \frac{az_1-b}{bz_1+a}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{az-b}{bz+a} = \frac{az_1-b}{bz_1+a} &\iff (az-b)(bz_1+a) = (az_1-b)(bz+a) \\
&\iff abzz_1 + a^2z - b^2z_1 - ab = abzz_1 + a^2z_1 - b^2z - ab \\
&\iff a^2z - b^2z_1 = a^2z_1 - b^2z \\
&\iff \left(a^2+b^2\right)z = \left(a^2+b^2\right)z_1 \\
&\iff z = z_1
\end{aligned}$$

f_u est donc bien une injection de E sur E

En conclusion, f_u est une bijection de E sur E.

Remarque :

⋆ f_u étant bijective, f_u admet une bijection réciproque $(f_u)^{-1}$ et nous avons, si $u = a + ib$, $(f_u)^{-1}(z) = \dfrac{az+b}{-bz+a} = f_{\overline{u}}(z)$. or, dans $\mathcal{U}$, $\overline{u} = \dfrac{1}{u} = u^{-1}$. Donc $(f_u)^{-1}(z) = f_{u^{-1}}(z) = f_{\overline{u}}(z)$

⋆ D'autre part, si $z \in E$, alors $f_u(z) \in E$. En effet, comme tout à l'heure, si $z = x + iy$ avec $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_u(z) &= \frac{a(x+iy)-b}{b(x+iy)+a} \\ &= \frac{\left((ax-b)(bx+a)+aby^2\right)+iy}{(bx+a)^2+b^2y^2} \end{aligned}$$

Donc, $f_u(z) \in E$

(b) *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe un élément $z_0 \in E$ qui soit invariant par f_u*

Si z est invariant par f_u, alors $z = f_u(z)$. Or,

$$z = f_u(z) \Longleftrightarrow z = \frac{az-b}{bz+a} \Longleftrightarrow bz^2 + az = az - b \Longleftrightarrow b\left(z^2+1\right) = 0$$

▷ Si $b = 0$, alors tout point $z \in E$ est fixe ; ce qui est normal puisque, si $b = 0$, alors $f_u = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

▷ Si $b \neq 0$, alors $z^2 + 1 = 0$ et $z = i$ ou $z = -i$. Seul $i \in E$. Ainsi, pour $b \neq 0$, f_u admet un unique point invariant $z_0 = i$, lequel est invariant pour tout $u \in \mathcal{U}$

3. *On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections f_u, autrement dit : $\mathcal{B} = \{f_u \text{ où } u \in \mathcal{U}\}$*

(a) *On considère l'application g de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$ définie par :*

$$\begin{cases} g : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \quad u & \longmapsto & g(u) = f_u \end{cases}$$

Quelles sont les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$?

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = g(v)$; alors, pour tout $z \in E$, nous avons $f_u(z) = f_v(z)$. Comme $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$, il existe $\theta_u \in \mathbb{R}$ et $\theta_v \in \mathbb{R}$ tels que $u = \cos\theta_u + i\sin\theta_u$ et $v = \cos\theta_v + i\sin\theta_v$

Donc :

$$\begin{aligned} f_u(z) = f_v(z) &\Longleftrightarrow \frac{\cos\theta_u z - \sin\theta_u}{\sin\theta_u z + \cos\theta_u} = \frac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \cos\theta_v} \\ &\Longleftrightarrow (\cos\theta_u z - \sin\theta_u)(\sin\theta_v z + \cos\theta_v) = (\cos\theta_v z - \sin\theta_v)(\sin\theta_u z + \cos\theta_u) \\ &\Longleftrightarrow \cos\theta_u \sin\theta_v z^2 + \cos\theta_u\cos\theta_v z - \sin\theta_u\sin\theta_v z - \sin\theta_u\cos\theta_v = \\ &\qquad \cos\theta_v\sin\theta_u z^2 + \cos\theta_v\cos\theta_u z - \sin\theta_v\sin\theta_u z - \sin\theta_v\cos\theta_u \\ &\Longleftrightarrow z^2(\cos\theta_u\sin\theta_v - \cos\theta_v\sin\theta_u) - (\sin\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_v\cos\theta_u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow z^2\sin(\theta_u - \theta_v) + \sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(z^2+1\right)\sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \end{aligned}$$

L'égalité $\left(z^2+1\right)\sin(\theta_u - \theta_v) = 0$ devant être vraie pour tout $z \in E$, nous devons donc avoir $\sin(\theta_u - \theta_v) = 0$.

Or, $\sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \Longleftrightarrow \theta_u - \theta_v = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

⋆ Donc, on peut avoir $\theta_u = \theta_v + 2k\pi$ et donc $u = v$

⋆ Ou bien on peut avoir $\theta_u = \theta_v + \pi + 2k\pi$ et donc $u = -v$

Les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$ sont donc $u = v$ ou $u = -v$

(b) *Préciser $(f_u)^{-1}$ et montrer que $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$*

Il suffit de regarder la question 2 pour voir que $(f_u)^{-1} = f_{u^{-1}} = f_{\overline{u}}$, et donc $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$

(c) *Soit $u \in \mathcal{U}$ fixé. Trouver $v \in \mathcal{U}$ tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$*

Nous avons donc $(f_u)^{-1} = f_{\overline{u}}$. Si $v \in \mathcal{U}$ est tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$, alors $v = \overline{u}$ ou $v = -\overline{u}$

(d) *Montrer que l'identité de E, notée Id_E est un élément de $\mathcal{B}$ et quels sont les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$*

Nous avons remarqué que $f_1 = f_{-1} = \mathrm{Id}_E$, et conformément aux questions précédentes, les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$ sont donc $u = 1$ ou $u = -1$

(e) *Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$. Montrer que $f_u \circ f_v$ est un élément de $\mathcal{B}$*

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$; il existe $\theta_u \in \mathbb{R}$ et $\theta_v \in \mathbb{R}$ tels que $u = \cos\theta_u + i\sin\theta_u$ et $v = \cos\theta_v + i\sin\theta_v$. Donc, pour $z \in E$:

$$\begin{aligned} f_u \circ f_v(z) &= f_u(f_v(z)) \\ &= \frac{\cos\theta_u f_v(z) - \sin\theta_u}{\sin\theta_u f_v(z) + \cos\theta_u} \\ &= \frac{\cos\theta_u\left(\dfrac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \sin\theta_v}\right) - \sin\theta_u}{\sin\theta_u\left(\dfrac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \sin\theta_v}\right) + \cos\theta_u} \\ &= \frac{(\cos\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_u\sin\theta_v)z - (\cos\theta_u\sin\theta_v + \sin\theta_u\cos\theta_v)}{(\cos\theta_u\sin\theta_v + \sin\theta_u\cos\theta_v)z + (\cos\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_u\sin\theta_v)} \\ &= \frac{\cos(\theta_u+\theta_v)z - \sin(\theta_u+\theta_v)}{\sin(\theta_u+\theta_v)z + \cos(\theta_u+\theta_v)} \\ &= f_{uv}(z) \end{aligned}$$

Comme $uv \in \mathcal{U}$, $f_{uv} \in \mathcal{B}$

(f) *En déduire la structure de l'ensemble $(\mathcal{B}, \circ)$*

Nous allons démontrer que $(\mathcal{B}, \circ)$ est un groupe commutatif
- ▷ Tout d'abord, la loi $\circ$ est associative et de composition interne
- ▷ $(\mathcal{B}, \circ)$ admet un élément neutre $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$
- ▷ Chaque élément $f_u \in \mathcal{B}$ admet un symétrique $(f_u)^{-1} = f_{u^{-1}} = f_{\overline{u}}$
- ▷ La loi $\circ$ est commutative car $f_u \circ f_v = f_{uv} = f_{vu} = f_v \circ f_u$

(g) *Démontrer que $g : (\mathcal{U}, \times) \longrightarrow (\mathcal{B}, \circ)$ est un homomorphisme de groupe. Est-ce un isomorphisme ?*

g est bien un homomorphisme, car $g(uv) = f_{uv} = f_u \circ f_v = g(u) \circ g(v)$. Mais, ce n'est pas un isomorphisme puisque g n'est pas injectif. Nous avons $\ker g = \{-1; +1\}$

4. *Dans cette question, nous nous plaçons dans le cas particulier où $u = i$*

C'est à dire que nous avons $f_u(z) = f_i(z) = -\dfrac{1}{z}$

(a) *On appelle $\Gamma = \left\{z = e^{i\theta} \text{ où } \theta \in]0;\pi[\right\}$. Quelle est l'image de Γ par f_i ?*

Γ est le demi-cercle supérieur de rayon 1 et donc les parties imaginaires sont strictement positives. Pour $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, nous avons :

$$f_i\left(e^{i\theta}\right) = -\frac{1}{e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} = e^{i\pi} \times e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$$

Comme $\theta \in]0;\pi[$, nous avons $\pi - \theta \in]0;\pi[$ et donc $f_i\left(e^{i\theta}\right) \in \Gamma$ ainsi $f_i(\Gamma) = \Gamma$ et Γ est donc globalement invariant par f_i

(b) *Soit $\theta_0 \in]0;\pi[$ fixé. On appelle $D(\theta_0) = \left\{\lambda e^{i\theta_0} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. Donner l'image de $D(\theta_0)$ par f_i*

En fait, $D(\theta_0)$ est une demie-droite issue de l'origine. Pour $z = \lambda e^{i\theta_0} \in D(\theta_0)$, avec $\lambda > 0$, nous avons :

$$f_i\left(\lambda e^{i\theta_0}\right) = -\frac{1}{\lambda e^{i\theta_0}} = \frac{-1}{\lambda}e^{-i\theta_0} = \frac{1}{\lambda} \times e^{i\pi} \times e^{-i\theta_0} = \frac{1}{\lambda} \times e^{i(\pi-\theta_0)}$$

Nous pouvons donc écrire que $f_i(D(\theta_0)) = D(\pi - \theta_0)$. C'est une demie-droite, symétrique de $D(\theta_0)$ par rapport à l'axe des imaginaires purs.

La figure 8.18 visualise les différentes transformations.

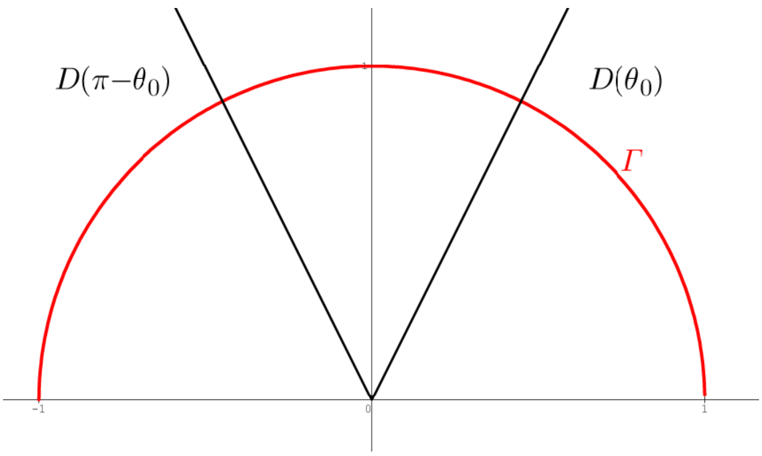

FIGURE 8.18 – Visualisations des transformations $f_i\,(z) = -\dfrac{1}{z}$