Chapitre 1

Théorie des ensembles, Logique

Langage formalisé

Les mathématiques, pour pouvoir être précises, et surtout pour pouvoir lever les ambiguïtés qu'on trouve dans le langage courant, ont besoin d'un langage formalisé, clair, et donc sans ambiguïté.
La mathématique n'est pas la seule science à utiliser un langage formalisé ; on peut penser à l'informatique, où tout, depuis le "langage machine" jusqu'aux langages de programmation est langage formalisé

1.1 Premières définitions

1.1.1 Assertion

Une assertion est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguité, suivant le contexte, ou indépendamment du contexte, s'il est vrai ou faux

Exemple 1 :

— L'assertion $3 \leqslant 5$ est vraie dans $\mathbb{R}$
— Par contre, l'assertion $5 < 4$ est fausse dans $\mathbb{R}$
— « Tout triangle isocèle a ses 3 angles égaux » est une assertion fausse.

En effet, il existe des triangles isocèles qui n'ont pas les 3 angles égaux ; il suffit pour cela de penser aux triangles rectangles et isocèles. Une notion apparaît ici, c'est la notion de quantificateur vue un peu plus loin

— La millième décimale de π est 7 est une assertion dont on peut dire si elle est vraie ou fausse [1]
— « Il existe des triangles isocèles ayant ses 3 angles égaux » est une assertion vraie.

Ce sont les triangles équilatéraux

— « -3 est un carré » est une assertion fausse dans $\mathbb{R}$, mais vraie dans $\mathbb{C}$
— Nous éviterons les énoncés invalides ou imprécis du type :
- Ce paquet pèse environ 1,5 kg
- La robe de mademoiselle est de la même couleur que l'eau du golfe du Morbihan [2]

1.1.2 Proposition

Une proposition est un énoncé contenant une variable. On la note $A(x)$ où x désigne la variable
La proposition $A(x)$ est, sans ambiguïté, vraie pour certaines valeurs, et fausse pour d'autres

1. La solution se trouve dans un livre ! !
2. D'autant que la couleur des eaux du golfe du Morbihan est très changeante

Exemple 2 :

Quelques exemples de propositions :

1. Considérons la proposition $A(x)$: $x^2 - 4x + 3 > 0$
   Alors, $A(0)$ est vraie et $A(2)$ est fausse
2. Considérons une autre proposition P :
   P (T) : la hauteur du triangle T est médiane et médiatrice.
   Alors P (triangle isocèle) est vraie
3. En fait, une assertion est une proposition toujours vraie ou toujours fausse

1.1.3 Vocabulaire

1. **Des propositions sont compatibles, s'il existe des valeurs de leurs variables les rendant vraies simultanément ; elles sont incompatibles sinon**
2. **Des propositions sont équivalentes, si, pour toutes les valeurs de leurs variables, elles ont même valeur de vérité.**
3. **Deux propositions sont contraires, si, pour toutes les valeurs de leurs variables, elles ont des valeur de vérité opposées.**

1.2 Opérations de logique élémentaire

Il existe des « connecteurs logiques » destinés à assembler les différentes propositions et relations entre elles.

1.2.1 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques sont :

1. **et avec le symbole mathématique** $\wedge$
2. **ou avec le symbole mathématique** $\vee$
3. **non avec le symbole mathématique** $\neg$
4. **implique avec le symbole mathématique** $\Rightarrow$

Remarque 1 :

1. **Attention ! !** $\wedge$, $\vee$, $\neg$ sont des notations qui peuvent changer d'un auteur à l'autre !
2. **On n'en a en fait besoin que de 2** [3]
   (a) ou avec le symbole mathématique $\vee$
   (b) non avec le symbole mathématique $\neg$
3. Nous définissons rigoureusement les connecteurs dans les lignes qui suivent.

1.2.2 Définition de la négation

La négation d'une proposition P**, notée** $\neg P$ **ou** $\overline{P}$**est vraie si** P **est fausse**
Table de vérité
On présente les résultats sous forme d'une table de vérité, en mettant 1 si la proposition est vraie et 0 si elle est fausse

P	$\neg P$
1	**0**
0	**1**

3. C'est en fait ceux que j'ai choisis ; on peut faire un autre choix !

1.2.3 Définition de la disjonction logique

La disjonction logique de 2 propositions P et Q, notée P OU Q (mathématiquement :$P \vee Q$), est vraie, si au moins l'une des 2 est vraie. Elle est fausse, sinon.
Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.4 Définition de la conjonction logique

La conjonction logique de 2 propositions P et Q, notée P ET Q (mathématiquement :$P \wedge Q$), est vraie, si les 2 propriétés sont vraies en même temps. Elle est fausse, sinon.
Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exercice 1 :

Démontrer que les propositions $(P \wedge Q)$ et $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$ ont même table de vérité.

Résolution

La résolution de tels exercices, par les tables de vérité, n'est pas du tout difficile ; elle est, par contre, réellement fastidieuse.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

Les deux propositions $P \wedge Q$ et $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$ ayant même table de vérité, elles sont donc logiquement équivalentes.

1.2.5 Définition

Deux propositions A et B qui ont la même table de vérité sont dites logiquement équivalentes et on écrit $A \longleftrightarrow B$ [4]

Exemple 3 :

Nous avons donc : $(P \wedge Q) \longleftrightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

Exercice 2 :

Montrez que nous avons $\neg(\neg P) \longleftrightarrow P$

4. On remplace, parfois, le signe $\longleftrightarrow$ par le signe $=$

1.2.6 Lois de MORGAN

Soient P et Q deux propositions. Nous avons :

1. $\boxed{\overline{(P \wedge Q)} \longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}}$
2. $\boxed{\overline{(P \vee Q)} \longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}}$

Exercice 3 :

Faire la démonstration des lois de Morgan à l'aide des tables de vérité

1.2.7 Distributivité

Étant données deux propositions P et Q

1. **Distributivité du ET par rapport au OU**
   Nous avons : $\boxed{P \wedge (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$
2. **Distributivité du OU par rapport au ET**
   Nous avons : $\boxed{P \vee (Q \wedge R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$

1.2.8 Implication logique

Etant données deux propositions P et Q, la proposition $\neg P \vee Q$ écrite aussi $\overline{P} \vee Q$ est appelée implication logique, notée $\Longrightarrow$.

Nous avons donc : $\boxed{(\neg P \vee Q) \longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)}$

Vocabulaire :

- P **est une condition suffisante pour** Q
- Q **est une condition nécessaire pour** P

Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercice 4 :

Montrez que nous avons $(P \Rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
On dit que $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est l'implication contrapposée de $(P \Rightarrow Q)$

1.2.9 Equivalence logique

Etant données deux propositions P et Q
L'équivalence logique $P \Longleftrightarrow Q$ est la relation $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$
Autrement dit : $(P \Longleftrightarrow Q) \longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P))$
Table de vérité de l'équivalence logique

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Remarque 2 :

1. Par la table de vérité de l'équivalence logique, on peut remarquer que $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q ont même valeur de vérité.
2. Pour $(P \iff Q)$, on dit
   — P est vraie si et seulement si Q est vraie
   — Ou bien
   Pour que P soit vraie,il faut et il suffit que Q soit vraie
   — Ou bien
   La condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie est que Q soit vraie

1.2.10 Tautologie

Une proposition dont la table de vérité ne contient que des valeurs « VRAI », est une tautologie

Exemple 4 :

$\big[(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})\big]$ est une tautologie. *(En faire la démonstration par table de vérité)*

1.2.11 Propriétés

L'équivalence et l'implication sont transitives, c'est à dire :

1. $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ **est une tautologie**
2. $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$ **est une tautologie**

Démonstration

Nous allons en faire la démonstration en utilisant les tables de vérité.

1. On démontre que $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est une tautologie
   Par simplification, on appele A la proposition $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)$	$P \Longrightarrow R$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. On démontre que $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$ est une tautologie
   Par simplification, on appelle B la proposition $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$

P	Q	R	$P \iff Q$	$Q \iff R$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \iff R)$	$P \iff R$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

1.3 Exercices de logique élémentaire

1.3.1 Tables de Vérité

Cette partie est destinée à manipuler les tables de vérité.

Exercice 5 :

Exercices de manipulation élémentaire

1. Ecrire les tables de vérité de $\overline{p} \wedge q$, $\overline{p \wedge q}$, $\overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p} \wedge p$
2. Ecrire les tables de vérité de $\overline{p} \vee q$, $\overline{p \vee q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{p} \vee p$
3. Ecrire les tables de vérité de

   (a) $(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$

   (b) $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q})$

   (c) $\overline{p \wedge (q \vee r)}$

   (d) $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$

   (e) $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$

   (f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$

Corrigé de l'exercice

Exercice 6 :

Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $p \vee \overline{(p \wedge q)}$
2. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$
3. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (c'est le modus ponens)

Corrigé de l'exercice

Remarque 3 :

En n'utilisant pas les tables de vérité, le calcul propositionnel permet de démontrer que nous avons affaire ou non à une tautologie.

1.3.2 Calcul propositionnel

Exercice 7 :

Soient f et g 2 formes propositionnelles. On dit que g est une conséquence de f si $f \Rightarrow g$ est une tautologie

Par exemple, d'après le modus ponens, q est une conséquence de $[p \wedge (p \Rightarrow q)]$

Montrer que $p \Rightarrow r$ est une conséquence de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 8 :

Montrer que les propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

1. $p \Rightarrow q$ et $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *(loi de contrapposition*
2. p et $p \vee (p \wedge q)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 9 :

x et y étant des nombres réels, réels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

1. Déterminer la contrapposée des énoncés suivants :
   (a) Si Arthur est poète, alors, il est pauvre
   (b) Si le carré d'un entier est impair, alors, cet entier est impair
   (c) Si je mange des graisses et si je ne fais pas de sport, alors j'aurai une maladie coronarienne
2. Trouver les négations des propositions précédentes *(évidemment, sans utiliser "il est faut que...." ou autre astuce du même genre!)*

Exercice 11 :

1. On définit le connecteur logique dit de SHEFFER et noté $\uparrow$ par $p \uparrow q = \text{Nand}(p, q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \wedge q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nand
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nand
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nand
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nand
2. On définit le connecteur logique dit de PIERCE et noté $\downarrow$ par $p \downarrow q = \text{Nor}(p, q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \vee q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nor
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nor
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nor
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nor
3. On considère le connecteur logique $\otimes$ défini par $p \otimes q \equiv p \wedge \bar{q}$
   (a) Donner la table de vérité de $p \otimes q$ et de $q \otimes p$; avons nous équivalence entre les deux propositions ?
   (b) Montrer que nous avons l'identité suivante : $p \otimes (q \vee r) = (p \otimes q) \wedge (p \otimes r)$
   (c) Montrer que $(p \otimes q) \wedge (r \otimes s) = (p \wedge r) \otimes (q \vee s)$
4. On considère le connecteur logique $\oplus$ défini par $p \oplus q = (p \vee q) \otimes (p \wedge q)$
   (a) Les propositions $p \oplus q$ et $q \oplus p$ sont-elles équivalentes ?
   (b) Montrer que $p \oplus q = (p \otimes q) \vee (q \otimes p)$
   (c) Montrer que $(p \oplus \bar{q}) \vee (p \oplus q)$est une tautologie

1.4 Axiomes et théorèmes : Raisonner, démontrer

1.4.1 Axiome

Un axiôme est une assertion énoncée explicitement une fois pour toutes

1.4.2 Théorème

Un théorème s'obtient par l'obtention répétée des 2 règles suivantes :

1. **Toute proposition obtenue par l'application d'axiômes est vraie.**
2. **MODUS PONENS : Etant données 2 propositions R et S, si la relation R est vraie, et si $R \Rightarrow S$ est vraie, alors S est vraie**

Remarque 4 :

Valeurs de la démonstration

1. La vérité mathématique est celle qui se démontre. Il y a une différence fondamentale entre les sciences expérimentales et la science mathématique.
2. Il peut exister des propositions A et $\neg A$ dont on ne sait démontrer s'ils sont vrais ou faux. On dit qu'ils sont <u>indécidables</u>

1.4.3 Raisonnement par l'absurde

Soit P une proposition.
S'il existe une proposition Q telle que la proposition $(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ soit vraie, alors, P est vraie.

Remarque 5 :

1. En utilisant une table de vérité :

P	Q	$\neg P \Longrightarrow Q$	$\neg P \Longrightarrow \neg Q$	$(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

   On remarque que $(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ a même table de vérité que P

2. Il est tout aussi possible d'utiliser le **calcul propositionnel** :

$$\begin{aligned}(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q) &\longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\\ &\longleftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q)\\ &\longleftrightarrow P \vee 0\\ &\longleftrightarrow P\end{aligned}$$

3. **Pratiquement**
   On veut prouver que la proposition P est vraie
   On suppose alors $\neg P$ vraie et on va démontrer que $(\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ est vraie, alors qu'on sait pertinemment que Q est vraie ; on arrive à une contradiction. On a alors,

$$(\neg P \Longrightarrow \neg Q) \longleftrightarrow Q \Longrightarrow P$$

Exemple 5 :

L'ensemble des nombres premiers est infini

<u>**Démonstration**</u>

On suppose l'ensemble des nombres premiers fini, et soit p le dernier
Soit $m = p! + 1$.
On divise alors m par l'un des quelconques autres entiers premiers, noté q, avec $q < p$. On a alors :

$$m = \left(\frac{p\,!}{q}\right) q + 1$$

Il faut faire remarquer que $\left(\frac{p\,!}{q}\right)$ est un entier. Donc, m n'est divisible par aucun nombre premier.
Ce qui est contradictoire avec le fait que m est décomposable en un produit de facteurs premiers, et donc divisible par au moins un nombre premier.
Il y a donc une contradiction

Analyse du raisonnement
P est la proposition : *L'ensemble des nombres premiers est infini*
On suppose donc, $\neg P$
Q est la proposition :*Tout nombre entier est décomposable en un produit de facteurs premiers*
En supposant $\neg P$, on a démontré $\neg Q$; il y a donc une contradiction

Remarque 6 :

Attention ! ! Il ne faut pas confondre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contrapposée