1.9 Les quantificateurs

1.9.1 Définition

Soit E un ensemble, et $A \subset E$
On appelle propriété caractéristique de A (ou relation collectivisante) toute propriété permettant de décider, pour tout $x \in E$, entre les deux propositions :

$$\begin{cases} x \in A \\ x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \end{cases}$$

Remarque 20 :

1. Si P est une propriété caractéristique de A, alors, (non$P$) -noté $\neg P$- est caractéristique de $\overline{A}$. On dit que P est définie sur E, et qu'elle a 2 valeurs : Vrai ou faux
2. On peut donc écrire : $A = \{x \in E \text{ tel que } P(x)\}$, et $\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } \neg P(x)\}$
3. A peut être défini par 2 propriétés caractéristiques, mais énoncées différemment ; on dit que ces propriétés sont équivalentes sur E

   Exemple :

$$T = \{\text{triangles ayant 2 côtés de même longueur}\}$$
$$T = \{\text{triangles ayant 2 angles égaux}\}$$

1.9.2 Définition de quantificateurs

Soit E un référentiel, et P une propriété définissant $A \subset E$

1. **Si $A \neq \emptyset$, il existe donc $x \in E$ tel que $P(x)$, que l'on écrit :**
$$(\exists x \in E)\ \ (P(x))$$
2. **Si $A = \emptyset$, il n'y a donc aucun $x \in E$ tel que $P(x)$, que l'on écrit :**
$$\neg\left[(\exists x \in E)\ \ (P(x))\right]$$
3. **Si $A = E$, alors, pour tout $x \in E$ on a $P(x)$, que l'on écrit :**
$$(\forall x \in E)\ \ (P(x))$$

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés QUANTIFICATEURS
- **$\forall$ est un quantificateur universel (« pour tout », ou « quel que soit »)**
- **$\exists$ est un quantificateur existentiel (« il existe au moins un »)**

Remarque 21 :

1. $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations, mais **des symboles** soumis à des règles strictes de logique
2. On peut aussi distinguer **égalité** et **identité**
   (a) **Identité :** $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$
   (b) **Egalité** : $(\exists x \in \mathbb{R})\ (2x + 1 = 0)$
3. $(\forall x \in E\ P(x)) \iff (A = E)$, et donc $\overline{A} = \emptyset$; la négation de $\overline{A} = \emptyset$ est $\overline{A} \neq \emptyset$, et donc, $(\exists x \in E)\,(\text{non } P(x))$, et donc,

$$\text{non}\left[(\forall x \in E)\ \ (P(x))\right] \Leftrightarrow (\exists x \in E)\,(\text{non}P(x))$$
$$(\forall x \in E)\ \ (P(x)) \Leftrightarrow \text{non}\left[(\exists x \in E)\,(\text{non}P(x))\right]$$

4. $(\forall x \in E \text{ non}P(x)) \Leftrightarrow (\overline{A} = E)$, et donc $A = \emptyset$; la négation de $A = \emptyset$ est $A \neq \emptyset$, et donc, $(\exists x \in E)(P(x))$, et donc,
$$\text{non}\left[(\forall x \in E)(\text{non}P(x))\right] \Leftrightarrow (\exists x \in E)(P(x))$$
5. Soient P et Q 2 propriétés définies sur E, et $A = \{x \in E\ P(x)\}$ et $B = \{x \in E\ Q(x)\}$, alors, l'implication $(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, se traduit par $A \subset B$, et $A = B$ se traduit par $(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$
6. On a donc, $A \cap B = \{x \in E\ P(x) \text{ et } Q(x)\}$ et $A \cup B = \{x \in E\ P(x) \text{ ou } Q(x)\}$

1.9.3 Tableau de correspondance entre propriétés définies sur E et parties de E

$x \in A$	$P(x)$
$x \in B$	$Q(x)$
$A \subset B$	$(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
$A = B$	$(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$
$x \in \overline{A}$	$\text{non}P(x)$
$\overline{\overline{A}} = A$	$(\forall x \in E)(\text{non}(\text{non}(P(x))) \Leftrightarrow P(x))$
$x \in A \cap B$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{et}Q(x))$
$x \in A \cup B$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{ou}Q(x))$
$A \cap B = \emptyset$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{et}Q(x))$ incompatibles
$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ ($\overline{A} = B$)	$(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow \text{non}Q(x))$

1.9.4 Exercices sur les quantificateurs

Exercice 32 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$
2. $\forall x : p(x) \Leftrightarrow q(x)$
3. $(\exists x) : (p(x) \wedge q(x))$
4. $(\forall x)(\forall y) : (p(x,y) \wedge q(x,y) \Rightarrow r(x,y))$
5. $(\exists x)(\forall y) : (p(x,y) \Rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y)))$

Exercice 33 :

Quelle est la valeur de vérité de la proposition suivante ; prouver votre affirmation : $\forall x \in \mathbb{Z} : x \neq x^2$

Exercice 34 :

On considère la proposition Q suivante :
$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(3^{2n} - 2^n = \left(3^2 - 2\right)^n\right)$$
1. Nier la proposition Q
2. Quelle est la valeur de vérité de la proposition Q ?

Exercice 35 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x)(\exists y) : (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$
2. $(\forall x)(\exists y : p(x,y) \Rightarrow q(x))$
3. $((\forall x)(\exists y) : p(x,y)) \Rightarrow ((\forall z) : r(z))$

Exercice 36 :

Ecrire les négations des expressions suivantes :
1. $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$
2. $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|u_n| \leqslant M)$

Exercice 37 :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on note $C(x, y)$ la propriété suivante : $y^2 + xy - x - 1 = 0$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation dans les affirmations fausses

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(C(x, y))$
2. $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(C(x, y))$
3. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(C(x, y))$
4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(C(x, y))$

Exercice 38 :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
On note $D(x, y)$ la propriété suivante : $-3y^2 - 6xy \geqslant 1$ Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation dans les affirmations fausses

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(D(x, y))$
2. $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\neg D(x, y))$
3. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(D(x, y))$
4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(D(x, y))$
5. $(\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\neg D(x, y))$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(D(x, y))$