1.10 Relations binaires

1.10.1 Définition

On appelle relation binaire dans un ensemble E, une relation $\Re$ entre éléments de E
Cette relation est caractérisée par son graphe

$$\Gamma = \{(x, y) \in E \times E \text{ tel que } x\Re y\}$$

Exemple 16 :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x\Re y \Leftrightarrow y = x^2$ On a : $2\Re 4$ $6\Re 36$, mais on n'a pas : $6\Re 9$
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\Re y \Leftrightarrow y - x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$; cette relation est appelée : relation de congruence modulo 2π
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$. C'est la relation de division

1.10.2 Définition : propriétés des relations

Soit E un ensemble
Une relation binaire $\Re$ dans E est dite

1. **réflexive si** $(\forall x \in E)\,(x\Re x)$
2. **symétrique si** $(\forall x \in E)$ **et** $(\forall y \in E)$**, nous avons l'implication** $(x\Re y \Rightarrow y\Re x)$
3. **antisymétrique si** $(\forall x \in E)$ **et** $(\forall y \in E)$ **nous avons l'implication suivante :** $(x\Re y$ **et** $y\Re x \Rightarrow x = y)$
4. **transitive si** $(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\forall z \in E)$**, nous avons l'implication suivante :** $(x\Re y$ **et** $y\Re z \Rightarrow x\Re z)$

Exemple 17 :

Voici une relation binaire dans un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, définie par son graphe

$$\Gamma = \{(a, a)\ \ (a, c)\ \ (b, c)\ \ (c, a)\ \ (c, d)\ \ (d, c)\ \}$$

1. **Cette relation n'est pas réflexive** : on n'a pas $b \Re b$
2. **Cette relation n'est pas symétrique**, car si nous avons $b \Re c$, nous n'avons pas $c \Re b$
3. **Cette relation n'est pas transitive**, car si nous avons $a \Re c$ et $c \Re d$, nous n'avons pas $a \Re d$

Remarque 22 :

Il existe d'autres qualités aux relations, en fait plus ou moins intéressantes comme l'irreflexivité

Une relation $\Re$ sur un ensemble E est **irréflexive**, si, pour tout $x \in E$, nous n'avons pas $x\Re x$

Exercice 39 :

Dans les exemples présentés dans 1.10.1, quelles sont les relations réflexives, symétriques, antisymétriques et transitives ?

1.10.3 Définition de relation d'équivalence

Soit E un ensemble, et $\Re$ une relation binaire sur E
Une relation est dite d'équivalence, si elle est (cf.1.10.2)

1. **réflexive**
2. **symétrique**
3. **transitive**

Remarque 23 :

1. On écrit $x \equiv y\,[\mathrm{mod}\Re]$ qui se lit :
   x **congru** à y **modulo** $\Re$
   (On doit cette notation et ce vocabulaire à K.F. GAUSS)
2. On doit donc avoir
   Réflexivité $x \equiv x\,(\mathrm{mod}\Re)$
   Symétrie Si $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\Re)$ alors $y \equiv x\,(\mathrm{mod}\Re)$
   Transitivité Si $x \equiv y\,(\mathrm{mod}\Re)$ et $y \equiv z\,(\mathrm{mod}\Re)$, alors $x \equiv z\,(\mathrm{mod}\Re)$

Exemple 18 :

1. L'égalité est une relation d'équivalence
2. Dans $\mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé, et $x \equiv y \iff y - x = kn$ où $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On écrit $x \equiv y\,[n]$. C'est la relation de congruence modulo n
3. Dans $\mathbb{R}$, $x \equiv y \iff y - x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On écrit $x \equiv y\,[2\pi]$. C'est la relation définissant la mesure des angles.
4. En géométrie, le parallélisme est une relation d'équivalence
5. Dans $\mathbb{R}$, la relation $x\Re y \iff \sin x = \sin y$ est-elle d'équivalence ?

1.10.4 Définition

Soit E un ensemble, et $\Re$ (ou $\equiv$) une relation d'équivalence sur E.
Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x, l'ensemble

$$\dot{x} = \{y \in E \text{ tel que } y\Re x\}$$

Remarque 24 :

1. $\dot{x}$ est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x ; on dit aussi que x est un représentant de la classe de x
2. L'ensemble des classes d'équivalence est noté : $E/\Re$ ou $E/\equiv$

Exercice 40 :

1. Montrer que si $y\Re x$ alors, $\dot{x} = \dot{y}$
2. Montrer que $(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)$ on a soit $\dot{x} = \dot{y}$ soit $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$

1.10.5 Définition de relation d'ordre

Soit E un ensemble, et $\Re$ une relation binaire sur E
$\Re$ est une relation d'ordre, si elle est (c.f.1.10.2)

1. **Réflexive,**
2. **Antisymétrique,**
3. **Transitive**

Remarque 25 :

On doit donc avoir

Réflexivité Pour tout $x \in E$, $x\Re x$
Antisymétrie Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, si $x\Re y$ et $y\Re x$ alors $y = x$
Transitivité Pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, si $x\Re y$ et $y\Re z$ alors $x\Re z$

Exemple 19 :

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation « $\leqslant$ »définie par : $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$ est une relation d'ordre, que l'on peut étendre à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
2. Dans $\mathbb{N}^*$, la relation définie par $x/y \iff$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = kx$ est une relation d'ordre ; on a donc $2/4$, mais pas $4/2$, pas plus que $2/11$
3. Si E est un ensemble, alors, la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre

Remarque 26 :

Il y a des relations qui ne permettent pas de comparer des éléments entre eux : Par exemple, la relation « divise » dans $\mathbb{N}$, et la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$

1.10.6 Définition

Soit $\Re$ relation d'ordre sur un ensemble E ; $\Re$ est dite <u>relation d'ordre total</u> , si tous les éléments de E sont comparables, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad x\Re y \text{ OU } y\Re x$$

Exemple 20 :

1. Les relations « divise » dans $\mathbb{N}$ et « $\subset$ » dans $\mathcal{P}(E)$ sont des relations d'ordre partielles.
2. On admet que la relation la relation « $\leqslant$ »est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

1.10.7 Définition de majorant et de minorant

Soit $(E, \Re)$ un ensemble ordonné, et $A \subset E$ une partie de E

1. **$a \in E$ est un <u>majorant</u> de A, si et seulement si**

$$(\forall x \in A)\,(x\Re a)$$

   Une partie $A \subset E$ est dite <u>majorée</u>, si elle admet un majorant.
2. **$b \in E$ est un minorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(b\Re x)$.**
   Une partie $A \subset E$ est dite <u>minorée</u>, si elle admet un minorant
3. **Une partie $A \subset E$ est dite <u>bornée</u>, si elle est à la fois majorée et minorée**

Exemple 21 :

1. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $A \cap B$ est un minorant de $\{A, B\}$ et $A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$.
2. Mieux ! ! toute partie $G \supset A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$ et toute partie $F \subset (A \cap B)$ est un minorant de $\{A, B\}$
3. Dans $(\mathbb{N}^*, /)$, on s'intéresse à $A = \{3, 4, 5\}$, alors, 60 est un majorant de A, de même que 120, 180, 240,....etc. 60 est même le plus petit des majorants.
   1 est le seul minorant de A
4. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$, 3 est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants ; -3 est un minorant, et on a $-3 \in A$ alors que $3 \notin A$

1.10.8 Définition d'élément maximum, d'élément minimum

Soit $(E, \Re)$ un ensemble ordonné, et $A \subset E$ une partie de E

1. **$M \in A$ est appelé <u>élément maximum</u> ou <u>plus grand élément</u> de A, si et seulement si**

$$(\forall x \in A)\,(x \Re M)$$

2. **$m \in A$ est appelé <u>élément minimum</u> ou <u>plus petit élément</u>de A, si et seulement si**

$$(\forall x \in A)\,(m \Re x)$$

Remarque 27 :

1. L'élément maximum ou l'élément minimum peuvent ne pas exister.

   Etudier l'existence de l'élément maximum ou de l'élément minimum dans $(\mathbb{N}^*, /)$, où $A = \{3, 4, 5\}$, puis $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$
2. Si l'élément maximum ou l'élément minimum existe, il est unique.

1.10.9 Définition de la borne supérieure, de la borne inférieure

Soit $(E, \Re)$ est un ensemble ordonné

1. **Soit $A \subset E$ une partie majorée de E. On appelle <u>borne supérieure</u> de A, le plus petit des majorants de A, et on le note : $\sup A$**
2. **Soit $A \subset E$ une partie minorée de E. On appelle <u>borne inférieure</u> de A, le plus grand des minorants de A, et on le note : $\inf A$**

Exemple 22 :

1. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $A \cap B$ est la borne inférieure de $\{A, B\}$ et $A \cup B$ est la borne supérieure de $\{A, B\}$
2. Dans $(\mathbb{N}^*, /)$, on s'intéresse à $A = \{3, 4, 5\}$, alors, 60 est la borne supérieure de A, et 1 en est la borne inférieure

Exercice 41 :

1. Etudier les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments de l'ensemble $A = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. Même question pour $A = \left\{\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

1.11 Exercices sur les relations binaires

1.11.1 Exercices élémentaires

Exercice 42 :

On considère une relation $\Re$ sur un ensemble E ; déterminer celles qui sont réflexives, symétriques et transitives.

1. E est l'ensemble des habitants de Vannes, et $\Re$ est la relation "$x\Re y$" signifiant que x et $y$ont la même mère.
2. E est l'ensemble des habitants de Vannes, et $\Re$ est la relation "$x\Re y$" signifiant que x et $y$ont un grand-père en commun.
3. E est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et "$x\Re y$" signifiant que $x^2 = y^2$
4. E est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et "$x\Re y$" signifiant que $x - y$ est pair
5. $E = \{1, 2, 3\}$ et le graphe de la relation $\Re$ est $\Gamma = \{(1,1)\,;(1,2)\,;(2,1)\,;(2,2)\}$

Exercice 43 :

$\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls.
Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(m,n)\,\mathcal{S}\,(m',n') \Longleftrightarrow mn' = m'n$$

1. Avons nous $(1,2)\,\mathcal{S}\,(3,4)$? $(5,7)\,\mathcal{S}\,(10,14)$?
2. La relation $\mathcal{S}$ est-elle réflexive ? Irréflexive ?
3. La relation $\mathcal{S}$ est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
4. La relation $\mathcal{S}$ est-elle transitive ?
5. La relation $\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence ? Une relation d'ordre ?

Exercice 44 :

Vérifier que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E, et déterminer les classes d'équivalence associées.

1. E est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et "$x\Re y$" signifiant que il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 7k$.
2. E est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et $\Re$ est une relation définie par :

$$(n_1, n_2)\,\Re\,(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

3. E est l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et $\Re$ est une relation définie par :

$$(n_1, n_2)\,\Re\,(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$$

Exercice 45 :

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on considère la relation $\Re$ suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\forall y \in \mathbb{Z})\,[(x\Re y) \Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z})\,(\exists v \in \mathbb{Z})\,(xu + yv = 1)]$$

1. Montrer que nous avons $2\Re 3$, $3\Re 4$; avons nous $2\Re 4$?
2. La relation $\Re$ est-elle réflexive ? irréflexive ?
3. La relation $\Re$ est-elle symétrique ? transitive ?

Exercice 46 :

Dans l'ensmble $\mathbb{N}_{10}$ des entiers compris entre 1 et 10, nous considérons les deux relations binaires : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définies par :

— $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y ont un diviseur premier en commun
— $x\mathcal{S}y$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $x \leqslant y$

1. Représenter les deux relations par un diagramme cartésien ; que dire des deux graphes ?
2. Donner les propriétés de chacune des relations : réflexivité, irréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Exercice 47 :

1. Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = 13k$$

   (a) Avons nous $5\mathcal{R}21$, $5\mathcal{R}31$?
   (b) Trouver trois entiers $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ $p \in \mathbb{Z}$, 2 à 2 différents et tous différents de -2 tels que $-2\mathcal{R}m$, $-2\mathcal{R}n$ et $p\mathcal{R}-2$
   (c) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\mathcal{S}$ suivante définie par :

$$x\mathcal{S}y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } x \leqslant y$$

   (a) Cette relation est-elle réflexive ? Irréflexive ?
   (b) Cette relation est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
   (c) Cette relation est-elle transitive ?
   (d) Quelle est la nature de la relation $\mathcal{S}$?

1.11.2 Vocabulaire de la relation d'ordre

Exercice 48 :

1. On considère la relation d'inclusion $\subset$ qui est une relation d'ordre sur les parties de $\mathbb{R}$.
   Soient $A = [1; 10]$ et $B = [3; 14]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$
   (a) Donner, au sens de la relation d'inclusion, le plus grand et le plus petit élément de l'ensemble $\{A, B\}$
   (b) Donner la borne supérieure et la borne inférieure de $\{A, B\}$
2. On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 49 :

Ordre lexicographique
On définit la relation $\Re$ suivante dans $\mathbb{R}^2$: $(a, b)\,\Re\,(c, d)$ si $a \leqslant c$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$

1. Monter que $\Re$ est une relation d'ordre ; cet ordre est-il total ?
2. Cet ordre est-il compatible avec l'addition ? Avec le produit par un scalaire ?
3. Dessiner l'ensemble suivant : $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (0, 0)\,\Re\,(x, y)\,\Re\,(1, 1)\right\}$

Exercice 50 :

Ordre produit
On considère le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
On considère, dans cet ensemble, la relation $\Re$ suivante :

$$(x, y) \ \Re \ (x_1, y_1) \Leftrightarrow x \leqslant x_1 \text{ et } y \leqslant y_1$$

1. Démontrer que la relation$\Re$ est une relation d'ordre ; cet ordre est-il total ?
2. Dessiner l'ensemble E, défini par

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } (0, 0) \Re (x, y) \text{ et } (x, y) \Re (1, 1)\right\}$$

3. L'ensemble E admet-il, pour $\Re$, un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
4. Dessiner l'ensemble des majorants de E ; dessiner l'ensemble des minorants de E

Exercice 51 :

Relation de division
Dans l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$, on considère la relation de division définie par :

$$x/y \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } y = kx$$

1. Montrer que la relation de division est une relation d'ordre ; cet ordre est-il total ?
2. Soit $X = \{3, 5, 4, 10, 15, 20, 60\}$; on munit X de la relation d'ordre induite par la division. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 52 :

Ordre dans l'espace de fonctions
$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies sur $\mathbb{R}$ en entier, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$(\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))\,(\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))\,(f\mathcal{R}g) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\,(f(x) \leqslant g(x))$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre
2. Cette relation d'ordre est-elle totale ? ?

Exercice 53 :

1. Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres x tels que $x^2 - 3x < 28$
2. Cet ensemble admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 54 :

Relation de bon ordre
Un ensemble E est un ensemble <u>bien ordonné</u> si une relation d'ordre est définie sur E, et que toute partie non vide de E admet un plus petit élément *(ou un élément minimum)*

1. Montrer qu'un ensemble bien ordonné est un ensemble totalement ordonné.
2. Montrer que dans un ensemble bien ordonné E, il est possible de définir une fonction **"successeur"** d'un élément en donnant une définition aussi précise que possible.