1.12 Notion de fonction

1.12.1 Définition

Soient E et F 2 ensembles

1. **Un graphe $G \subset E \times F$ est dit fonctionnel s'il vérifie la relation suivante :**
   Pour tout $x \in E$, l'ensemble $G_x = \{y \in F$ tel que $(x, y) \in G\}$ est soit vide, soit réduit à un seul élément.
   Ce qui peut encore s'exprimer : $\text{Card } G_x \in \{0, 1\}$
2. **On appelle fonction de E dans F toute correspondance (ou relation) dont le graphe est fonctionnel**
3. **On appelle application de E dans F toute correspondance (ou relation) dont le graphe est fonctionnel, et dont le domaine de définition est E.**

Remarque 28 :

Autrement dit

1. f est une **fonction** de E dans F, si, à chaque élément $x \in E$, f fait correspondre à x au plus un élément $y \in F$ *(c'est à dire 0 ou 1)*
2. f est une **application** de E dans F, si, quel que soit l'élément $x \in E$, f fait correspondre à x un unique élément $y \in F$ *(c'est à dire exactement 1)*

Remarque 29 :

1. E est **l'ensemble de départ**, et F est **l'ensemble d'arrivée**
2. $f(x)$ est la valeur de la fonction f en x, ou encore, l'image de x par f
3. Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ où $x \in E$
4. On écrit :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
5. Quand donc 2 fonctions sont-elles égales ?
   Deux fonctions sont égales si elles ont même ensemble de départ, **et** même ensemble d'arrivée, **et si**, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$
6. On note souvent l'ensemble des fonctions de E dans F : F^E
7. Il ne faut surtout pas confondre la fonction f qui est un être mathématique, et l'image $f(x)$ qui est un élément de l'ensemble d'arrivée F.
8. De manière théorique, on peut définir une fonction f comme un triplet $f = (E, F, G)$, où $G \subset E \times F$ est un graphe fonctionnel.
   Donc, 2 fonctions $f = (E, F, G)$ et $g = (E', F', G')$ sont égales si et seulement si $E = E'$, $F = F'$ et $G = G'$

Exemple 23 :

Exemples de fonctions

1. Toutes les fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$
2. Toutes les transformations géométriques affines.
3. L'application identique :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \text{Id}_E : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \text{Id}_E(x) = x \end{array} \right.$$
4. Les fonctions à plusieurs variables :
   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} f : E \times F & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & f[(x, y)] \end{array} \right.$

(b) Exemple de fonction numérique à 2 variables :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f\left[(x,y)\right] = (x+y, x-y) \end{cases}$$

(c) Exemple de fonction numérique à n variables à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f\left[(x_1, \dots, x_n)\right] = x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

5. L' application première projections :

$$\begin{cases} pr_1 : E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & pr_1\left[(x,y)\right] = x \end{cases}$$

6. L'application seconde projection

$$\begin{cases} pr_2 : E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & pr_2\left[(x,y)\right] = y \end{cases}$$

7. Une notion voisine de celle de fonction est la notion de **famille indexée** par un ensemble I : $(x_i)_{i \in I}$

(a) C'est en fait une fonction

$$\begin{cases} f : I & \longrightarrow & F \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{cases}$$

Et $(x_i)_{i \in I}$ désignant la famille, est en fait le graphe de la fonction f

(b) En particulier si $I = \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & f(n) = x_n \end{cases}$$

f devient alors, et désigne une **suite** d'éléments de F, F désignant n'importe quel ensemble.

(c) L'ensemble des suites numériques devient alors $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour les suites numériques réelles et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour les suites numériques complexes.

(d) Il y a aussi le cas où I est un ensemble fini : $I = \{1 \dots n\}$, et nous avons :

$$\begin{cases} f : I & \longrightarrow & F \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{cases}$$

Le graphe de f est alors $G = \{(n, x_n) \text{ où } n \in I\}$; c'est une suite finie, et l'ensemble de toutes les fonctions de $I = \{1 \dots n\}$ dans F est donc F^n *(C'est exactement le produit cartésien)*

8. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, alors nous avons : $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \text{ tel que } \forall i \in I x \in A_i\}$ et $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \text{ tel que } \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}$

Exercice 55 :

Exercice sur la fonction caractéristique d'un ensemble
Soit E un ensemble, et $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. On considère $A \subset E$. On appelle fonction caractéristique de A, une application 1_A, définie par :

$$\begin{cases} 1_A : E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

Pour $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$ et que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B$

1.12.2 Images directes et images réciproques

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. **Soit $A \subset E$. On appelle image directe de A par f l'ensemble**

$$f(A) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$

2. **Soit $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble**

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

Remarque 30 :

1. Si A est vide, alors $f(A)$ est vide
2. Par contre, si B est non vide, $f^{-1}(B)$ peut être vide.

   Exemples :

   (a) Si $E = F = \mathbb{R}$, et $f(x) = \sin x$ et si $B = [+2, +\infty[$, alors $f^{-1}(B) = \emptyset$

   (b) Toujours si $E = F = \mathbb{R}$, et $f(x) = \sin x$:

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

   $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ est un ensemble infini, néanmoins dénombrable.

1.12.3 Définition

1. **Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$. On dit que f est constante sur A si $f(A)$ se réduit à un seul élément, c'est à dire si**

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(((x \in A) \text{ et } (y \in A)) \Longrightarrow f(x) = f(y))$$

   f est dite constante si f est dite constante sur E en entier.

2. **Soient E un ensemble, et $f : E \longrightarrow E$ une application.**

   (a) Soit $A \subset E$; On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$ c'est à dire si :

$$(\forall x \in E)((x \in A) \Longrightarrow f(x) \in A)$$

   (b) Si $x \in E$ est tel que $f(x) = x$, on dit que x est un point fixe de f

1.12.4 Application surjective

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective ou encore que f est une surjection, si et seulement si $f(E) = F$
On dit que f est une application de E sur F

Remarque 31 :

1. $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si **tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent**
2. $f : E \longrightarrow F$ est donc surjective, si et seulement si $(\forall y \in F)\left(f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\right)$
3. **Définition formalisée de surjection :**

   $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x))$

1.12.5 Application injective

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective ou encore que f est une injection, si et seulement si $(\forall y \in F)$, si $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide, alors $f^{-1}(\{y\})$ n'a qu'un seul élément.
On dit que f est une application de Edans F

Remarque 32 :

1. **Définition formalisée d'injection :**
   $f : E \longrightarrow F$ est donc injective, si et seulement si
   $$(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$$
2. **En utilisant la contrapposée**, de la définition formalisée :
   $f : E \longrightarrow F$ est injective, si et seulement si
   $$(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,(x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$$
3. Autre façon de voir les choses :
   $f : E \longrightarrow F$ est injective, si et seulement si les éléments de l'ensemble d'arrivée ont au plus un antécédent

Exercice 56 :

Quelle est la nature *(au sens injection ou surjection)* de ces différentes fonctions ?

1. $\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$

1.12.6 Définition d'une bijection

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est bijective ou encore que f est une bijection, si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Remarque 33 :

1. Revenons sur la définition de f bijective,
   — f est surjective, donc $(\forall y \in F)$, $f^{-1}(\{y\})$ est non vide.
   — f injective, alors, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ a 0 ou 1 élément
   En synthèse, f est bijective, si et seulement si $f^{-1}(\{y\})$ est réduit à un seul élément.
2. **Exemple d'application bijective :**
   $$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$

1.12.7 Conséquence de la définition de bijection

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une bijection.
Alors, $(\forall y \in F)$, l'équation $y = f(x)$ n'a qu'une seule solution dans E

<u>Démonstration</u>

La démonstration est évidente et résulte directement de la définition

Remarque 34 :

Existence d'une application réciproque

1. Pour $y \in F$, appelons $g(y)$ la solution de l'équation $y = f(x)$, *(cette solution existe, car f est surjective, et est unique, car f est injective ; voir le résultat 1.12.7)* on peut alors définir une application $g : F \longrightarrow E$, telle que, si $y \in F$, $g(y)$ est la solution de l'équation $y = f(x)$
2. On aurait donc $y = f(g(y))$; g est l'application réciproque de f, souvent notée f^{-1} ; f^{-1} est aussi une bijection, et nous avons $f^{-1} : F \longrightarrow E$

   $g(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$ ou bien $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$

1.12.8 Application composée

Soient E, F et G 3 ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications.
On peut alors définir $h : E \longrightarrow G$ telle que, $(\forall x \in E)(h(x) = g(f(x)))$
On note alors :$h = g \circ f$

Remarque 35 :

En commentaire, on peut penser à une application

$$\begin{cases} \Phi : F^E \times G^F & \longrightarrow & G^E \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$$

Exercice 57 :

1. Soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$; A quels ensembles appartiennent $f \circ g$ et $g \circ f$?
2. Si $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^2$; calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Décomposer sous la forme $f \circ g$, l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(2 + \sin x)$

1.12.9 Associativité de la composition des applications

La composition des applications est associative
C'est à dire que si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ et $h \in H^G$, alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

1.12.10 Conservation de certaines propriétés par la composition

Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$

1. **Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective**
2. **Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective**
3. **Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et**

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration

1. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ injectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est injective.
   Soient donc $x \in E$ et $y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$; nous avons :

$$g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longleftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

— g est injective, donc $g(f(x)) = g(f(y)) \Longrightarrow f(x) = f(y)$
— f est injective, donc $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$
Donc $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longrightarrow x = y$; $g \circ f$ est injective

2. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ surjectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est surjective.
   Soit donc $z \in G$. Existe-t-il $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$?
   — g est surjective, il existe donc $y \in F$ tel que $g(y) = z$
   — De même, f est surjective, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$
   Nous avons donc
   $$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$
   Donc, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. $g \circ f$ est donc surjective.

3. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est bijective.
   Des 2 résultats précédents, nous tirons :
   — g et f étant bijectives, sont surjectives, donc $g \circ f$ est surjective.
   — g et f étant bijectives, sont injectives, donc $g \circ f$ est injective.
   Nous avons donc $g \circ f$ surjective et injective, donc bijective