1.13 Exercices sur les fonctions et les applications

1.13.1 Image directe, image réciproque

Exercice 58 :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$; on appelle $A=[-4;+2]$, et $B=[1;3]$ Donner $f(A)$; $f(B)$; $f(A\cap B)$; $f^{-1}(A)$; $f^{-1}(B)$

Exercice 59 :

L'objet de cet exercice (réellement un peu théorique), est de faire manipuler les notions de fonctions, et les notions d'inclusion d'ensembles ;
Soient E et F, deux ensembles, et f une application de E dans F

1. Soient $A\subset E$ et $B\subset E$; montrer que : $A\subset B\Longrightarrow f(A)\subset f(B)$ et $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$
2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à $x\in\mathbb{R}$ fait correspondre $f(x)=x^2$; on appelle $A=[-4;2]$ et $B=[1;3]$; évaluer $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$
3. Soient $C\subset F$ et $D\subset F$; montrer que : $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$

Exercice 60 :

On appelle **fonction caractéristique** d'un ensemble $A\subset E$, l'application $1_A:E\longrightarrow\{0,1\}$, telle que $1_A(x)=1$ si $x\in A$, et $1_A(x)=0$ si $x\notin A$.
Soient $A\subset E$ et $B\subset E$; Déterminer la fonction caractéristique de $\overline{A}$, $A\cup B$,$A\cap B$, $A\Delta B$, connaissant 1_A et 1_B

1.13.2 Exercices divers

Exercice 61 :

1. Soit $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\end{array}\right.$
   (a) f est-elle une application ?
   (b) Quelle condition devons donner à l'ensemble de départ pour que f soit une application ?
2. Résoudre l'équation, pour $x\neq+1$, $\dfrac{x+1}{x-1}=+1$
3. Soit $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}-\{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\end{array}\right.$
   (a) Cette application est-elle surjective ?
   (b) Cette application est-elle injective ?
4. Soit $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}-\{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{+1\} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\end{array}\right.$
   (a) Cette application est-elle injective ? surjective ?
   (b) Calculez $f\circ f$; que pouvez vous en déduire ?

Exercice 62 :

Soient E et F, deux ensembles, et f une application de E dans F

1. Démontrez que, pour tout ensemble $A\subset E$, que $A\subset f^{-1}(f(A))$
2. Démontrez que, si f est injective, pour tout ensemble $A\subset E$, nous avons $A=f^{-1}(f(A))$
3. Soit $f(x)=\sin x$ et $A=\left\{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}$ Rechercher $f(A)$, puis $f^{-1}(f(A))$, et vérifier que si f n'est pas injective, on ne peut avoir que l'inclusion.

Exercice 63 :

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-i}{iz-1}$ cette fonction est-elle injective ?surjective ? Comment modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour que f soit bijective ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + 1$; cette application est-elle injective ? Surjective ? Au cas où elle n'est pas injective ou surjective, comment modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour qu'elle le soit ?
   Si elle est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 64 :

On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$
2. Résoudre les équations suivantes, dans lesquelles l'inconnue est $n \in \mathbb{Z}$
   (a) $f(n) = 125$
   (b) $f(n) = 532$
3. Calculez $f(f(n))$ et en déduire f^{-1}

Exercice 65 :

On considère les 2 applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 2n$ et
$$\begin{cases} g(n) = \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(n) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

Exercice 66 :

Soient g une application de F dans G, et f une application de E dans F.

1. Nous avons montré que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Montrez que la réciproque est fausse.*(Vous chercherez un exemple où g est injective, f non injective et $g \circ f$ injective)*
2. De même, nous avons montré que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective. Montrez que la réciproque est fausse.*(Vous chercherez un exemple où $g \circ f$ est surjective, f surjective, g non surjective)*
3. Montrez que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective
4. Montrez que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.