1.14 Corrigé de quelques exercices

1.14.1 Logique élémentaire

Exercice 1 :

Ecrire les tables de vérité de

1. $(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$

   Rien de plus facile !!

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

2. $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q})$

   Il est intéressant de remarquer, en utilisant les lois de Morgan, que $\bar{p} \vee q = \overline{p \wedge \overline{q}}$ et que, nous avons donc :

$$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q}) = (\overline{p \wedge \overline{q}}) \wedge (p \wedge \bar{q})$$

   qui est du type $a \wedge \overline{a}$ qui est toujours faux

3. $\overline{p \wedge (q \vee r)}$

   Pour faire la table de vérité, en utilisant les lois de Morgan, il suffit de vérifier que :

$$\overline{p \wedge (q \vee r)} = \overline{p} \vee \overline{(q \vee r)} = \overline{p} \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$$

   La table de vérité en découle toute seule

4. $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$

   Nous allons, utiliser le fait que $A \Longrightarrow B$ est logiquement équivalent à $\neg A \vee B$. Donc :

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q) &\longleftrightarrow \neg((p \vee q)) \vee (\bar{p} \wedge q) \\
&\longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \text{ loi de Morgan} \\
&\longleftrightarrow \overline{p} \wedge (q \vee \overline{q}) \text{ Distributivité du } \wedge \text{ par rapport au } \vee \\
&\longleftrightarrow \overline{p} \wedge (1) \\
&\longleftrightarrow \overline{p}
\end{aligned}$$

   La table de vérité de $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$ est donc celle de $\overline{p}$

5. $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$

   Nous allons réutiliser le fait que $A \Longrightarrow B$ est logiquement équivalent à $\neg A \vee B$. Donc :

$$(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow \neg(\bar{p} \wedge q) \vee (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow (p \vee \bar{q}) \vee (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow (p \vee \bar{q})$$

   La table de vérité de $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$ est donc celle de $p \vee \bar{q}$

p	q	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$

   On va modifier $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$ de telle sorte à n'avoir que des $\vee$, $\wedge$ et $\neg$

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r) &\longleftrightarrow \neg(p \Rightarrow q) \vee (p \vee r) \\
&\longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \vee r) \\
&\longleftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee r) \text{ (Loi de Morgan)}
\end{aligned}$$

D'où la table de vérité :

p	q	r	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$p \vee r$	$(p \wedge \overline{q}) \vee (p \vee r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

Retour à l'énoncé de l'exercice

Exercice 2 :

Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

Une proposition est une tautologie si elle est toujours vraie, c'est à dire si sa table de vérité ne contient que des 1.

1. $p \vee \overline{(p \wedge q)}$

   Rien de plus simple ! !

$$\begin{aligned} p \vee \overline{(p \wedge q)} &\longleftrightarrow p \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \text{ Loi de Morgan} \\ &\longleftrightarrow (p \vee \overline{p}) \vee \overline{q} \text{ Associativité du OU} \\ &\longleftrightarrow 1 \vee \overline{q} \\ &\longleftrightarrow 1 \end{aligned}$$

   C'est donc bien une tautologie

2. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$

   Nous avons, comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q) &\longleftrightarrow (\neg p \vee q) \vee (p \wedge q) \\ &\longleftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee p) \wedge ((\neg p \vee q) \vee q) \text{ Distributivité du OU par rapport au ET} \\ &\longleftrightarrow (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee q \vee q) \\ &\longleftrightarrow (1 \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \\ &\longleftrightarrow (1 \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \\ &\longleftrightarrow 1 \wedge (\neg p \vee q) \\ &\longleftrightarrow \neg p \vee q \end{aligned}$$

   Donc, $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ n'est pas une tautologie ; sa table de vérité est celle de $\neg p \vee q$

3. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (c'est le modus ponens)

   Comme précédemment, nous allons utiliser le calcul propositionnel et procéder par équivalence logique.

$$\begin{aligned} [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q &\longleftrightarrow [p \wedge (\overline{p} \vee q)] \Rightarrow q \\ &\longleftrightarrow [(p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q \text{ (Distributivité du ET par rapport au OU} \\ &\longleftrightarrow [0 \vee (p \wedge q)] \Rightarrow q \\ &\longleftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow q \\ &\longleftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee q \\ &\longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee q \text{ (Loi de Morgan} \\ &\longleftrightarrow \overline{p} \vee (\overline{q} \vee q) \text{ (Associativité du OU} \\ &\longleftrightarrow \overline{p} \vee 1 \\ &\longleftrightarrow 1 \end{aligned}$$

   $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ est bien une tautologie

Retour à l'énoncé de l'exercice