Chapitre 7

Les nombres réels

Ce chapitre représente la base de ce qui doit être connu sur les nombres réels. Beaucoup de résultats seront admis. Ils seront démontrés dans des parties de L_1 ou de L_3

7.1 Relation d'ordre

Cette partie complète et surtout adapte à $\mathbb{R}$ la notion de relation d'ordre vue dans le chapitre 1, et définie en 1.10.6. On utilise, sans la définir vraiment, la relation d'ordre naturel « $\leqslant$ ».
On admettra que la relation d'ordre « $\leqslant$ » est une relation d'ordre total

7.1.1 Définition de majorant et de minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$

1. **$a \in \mathbb{R}$ est un majorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(x \leqslant a)$.**
   Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite majorée, si elle admet un majorant.
2. **$b \in \mathbb{R}$ est un minorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(b \leqslant x)$.**
   Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée, si elle admet un minorant
3. **Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite bornée, si elle est à la fois majorée et minorée**

Exemple 1 :

1. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$, 3 est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants ; -3 est un minorant, et on a $-3 \in A$ alors que $3 \notin A$
2. Dans $\mathbb{R}$, muni de la relation d'ordre total $\leqslant$, un majorant de l'intervalle $I =]0, +1]$ est $+1$, mais aussi $+2$. En fait, l'ensemble des majorants de I est l'intervalle $[+1; +\infty[$
3. Pour ce même intervalle $I =]0, +1]$, un minorant est 0, un autre est -1, et l'ensemble des minorants est donné par l'intervalle $]-\infty, 0]$
4. On doit remarquer que $+1 \in I$, alors que $0 \notin I$

7.1.2 Définition d'élément maximum, d'élément minimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$

1. **$M \in A$ est appelé élément maximum de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(x \leqslant M)$.**
2. **$m \in A$ est appelé élément minimum de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(m \leqslant x)$**

Remarque 1 :

1. Il faut remarquer que les éléments maximaux ou **minimaux sont dans** A
2. L'élément maximum ou l'élément minimum peuvent ne pas exister.
   Etudier l'existence de l'élément maximum ou de l'élément minimum dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$**, où** $A = \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $-3 \leqslant x < 3\} = [-3; +3[$

   M est élément maximum si $M \in A$, et si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.
   Soit donc M l'élément maximum de A.
   Alors, $M < +3$. Soit $X = \dfrac{M+3}{2}$; alors, $M < X$ et $X < +3$, donc $X \in A$, et M n'est plus le plus grand élément de A. Il y a donc contradiction.
   Ainsi, A n'admet pas de plus grand élément.
   Par contre, A admet un plus petit élément qui est -3

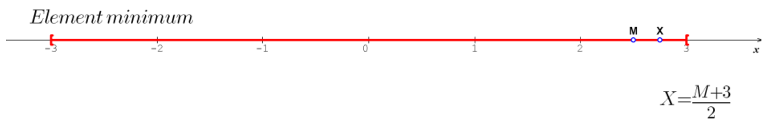

Figure 7.1 – Schema représentant M et X

7.1.3 Proposition

Si l'élément maximum ou l'élément minimum existe, il est unique.

Démonstration

Nous ne faisons la démonstration que dans $\mathbb{R}$; l'étendre à un autre ensemble ordonné ne pose aucun problème.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ qui possède 2 éléments maximaux M_1 et M_2
- Comme $M_1 \in A$ et que M_2 est un élément maximal, $M_1 \leqslant M_2$
- De même, comme $M_2 \in A$ et que M_1 est un élément maximal, $M_2 \leqslant M_1$

De l'antisymétrie de la relation d'ordre, $M_1 = M_2$
La démonstration de l'unicité de l'élément minimal est identique

7.1.4 Définition de la borne supérieure, de la borne inférieure

1. **Soit** $A \subset \mathbb{R}$**, une partie majorée de** $\mathbb{R}$**.**
   On appelle borne supérieure de A**, le plus petit des majorants de** A**, et on le note :** $\sup A$
2. **Soit** $A \subset \mathbb{R}$ **une partie minorée de** $\mathbb{R}$**.**
   On appelle borne inférieure de A**, le plus grand des minorants de** A**, et on le note :** $\inf A$

Exemple 2 :

Intéressons nous à l'ensemble des nombres réels :

1. Considérons : $[0, +1]$:
   - Sa borne inférieure est 0, de même que le plus petit élément est 0
   - Sa borne supérieure est $+1$, de même que le plus grand élément est $+1$
2. Quant à l'ensemble $]0, +1[$
   - Sa borne inférieure est 0, mais le plus petit élément n'existe pas.
   - Sa borne supérieure est $+1$, et le plus grand élément n'existe pas
3. Pour l'ensemble $[0, +\infty[$:

— Sa borne inférieure est 0, de même que le plus petit élément est 0
— Par contre, ni sa borne supérieure, ni le plus grand élément n'existent.

4. Et pour l'ensemble $]-\infty, +1[$:
— Ni sa borne inférieure, ni le plus petit élément n'existent.
— Sa borne supérieure est $+1$, mais il n'y a pas de plus grand élément.

Exercice 1 :

Etudier les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments de l'ensemble $A = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Résolution
Soit $y \in A$
Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = \dfrac{1}{m}$

1. Nous avons $\dfrac{1}{m} \leqslant 1$, et 1 apparaît comme un majorant de A. $1 \in A$ et 1 est donc à la fois borne supérieure et plus grand élément de A.
2. De même, $y > 0$ et 0 apparaît comme un minorant de A, mais $0 \notin A$
   (a) <u>A n'admet pas de plus petit élément</u>
   Supposons, au contraire, que A admette un plus petit élément, et appelons le x. Comme $x \in A$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{1}{m}$, et nous devons avoir, pour tout $y \in A$, $x \leqslant y$. Or, en prenant $x_1 = \dfrac{1}{m+1}$, nous avons $x_1 < x$, et x ne peut pas être le plus petit élément.
   (b) <u>0 est la borne inférieure de A</u>
   Nous avons déjà remarqué que 0 est un minorant de A. Montrons que c'est le plus grand. Soit $\varepsilon > 0$ soit un minorant de A. Il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$; il suffit de choisir $m > \dfrac{1}{\varepsilon} + 1$ et m entier, et aucun $\varepsilon > 0$ ne peut être minorant de A

7.1.5 Exercices

Exercice 2 :

1. Etudier l'existence de l'élément maximum ou l'élément minimum dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, où
$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -1 \leqslant x < +1\} = [-1; +1[$$
2. On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 3 :

Déterminer les majorants et les minorants pour les ensembles A suivants, et trouver éventuellement les bornes de A

1. $A = \left\{2n^2 - 9n + 4 \text{ où } n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $A = \left\{\dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + 4} \text{ où } n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $A = \left\{\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 4 :

Pour 2 sous ensembles de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, non vides et bornés, on note :
$$-A = \{-x \text{ avec } x \in A\} \text{ et } A + B = \{x + y \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B\}$$

1. Calculer $\inf(-A)$ et $\sup(-A)$ en fonction de $\inf(A)$ et $\sup(A)$
2. Calculer $\inf(A + B)$ et $\sup(A + B)$ en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$, $\sup(B)$ et $\sup(A)$
3. Soit $AB = \{xy \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B\}$. Que pouvons nous dire de $\inf(AB)$ et $\sup(AB)$?

7.2 Insuffisance des rationnels

Introduction

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, c'est à dire $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$. On note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
On ne retient, en fait, que les fractions irréductibles, c'est à dire les rationnels $x = \frac{a}{b}$, tels que pgcd $(a, b) = 1$ [1] ; en fait, le rationnel $x = \frac{a}{b}$ tel que pgcd $(a, b) = 1$ est le représentant de la classe d'équivalence dans la relation d'équivalence définie sur l'ensemble des fractions par :

$$\left(\frac{a}{b}\Re\frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc)$$

Chose remarquable pour $\mathbb{Q}$:
— L'addition est interne dans $\mathbb{Q}$: si $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$, $r + s \in \mathbb{Q}$
— La multiplication est interne dans $\mathbb{Q}$: si $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$, $r \times s \in \mathbb{Q}$
— Chaque élément non nul de $r \in \mathbb{Q}^*$, admet un inverse $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}^*$
$\mathbb{Q}$ a donc une structure de corps commutatif

Toutes les équations dans $\mathbb{Q}$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{Q}$

1. L'équation $x^2 = 16$ est une équation dans $\mathbb{Q}$ qui a des solutions dans $\mathbb{Q}$; ces solutions sont : $x = +4$ et $x = -4$; de même, l'équation $x^3 = 8$ est une équation dans $\mathbb{Q}$ qui a des *(en fait une seule)* solutions dans $\mathbb{Q}$ *(c'est $x = +2$)*
2. Par contre, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$

7.2.1 Proposition

L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$

Démonstration

En effet, supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un rationnel $x_0 = \frac{p}{q}$ tel que pgcd $(p, q) = 1$ et qui soit solution de $x^2 = 2$.
Nous avons alors : $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$; ce qui montre que p^2 est pair, et **donc que p aussi est pair.**
Nous avons alors $p = 2k$, et, d'après l'équation ci-dessus,

$$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$$

Ce qui montre que, cette fois ci, q est pair, et il y a contradiction avec l'hypothèse pgcd $(p, q) = 1$
Donc, les solutions de $x^2 = 2$ ne sont pas rationnelles.

Exemple 3 :

Voici une généralisation de la proposition ci-dessus :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Résolution
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on s'intéresse à $\sqrt{n}$:
On peut avoir $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ *(exemple $\sqrt{9} = 3$)*, mais, que se passe-t-il si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$? *(par exemple, est ce que $\sqrt{3}$ peut se mettre sous forme de fraction ?)*
Nous allons donc montrer que si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, c'est à dire que $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel, autrement dit ne peut pas se mettre sous forme de fraction.

1. C'est à dire tels que a et b n'aient pas de diviseurs communs. Voir le cours d'arithmétique

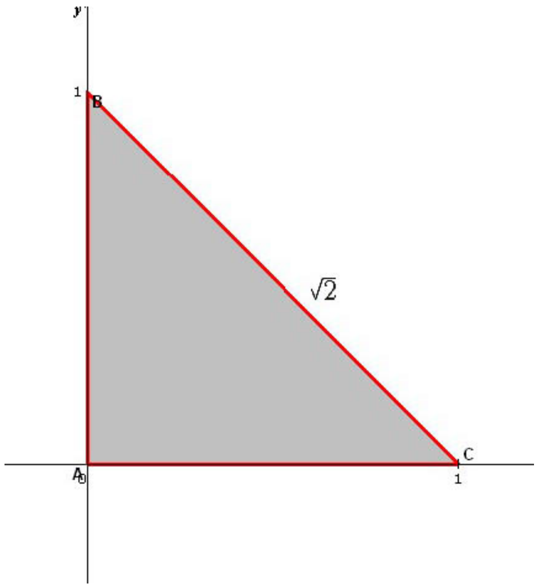

FIGURE 7.2 – Un triangle rectangle isocèle qui a deux côtés de longueur 1 a une hypothénuse de longueur $\sqrt{2}$

Supposons $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, mais que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$
On écrit donc $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$, avec pgcd $(a, b) = 1$.
En élevant au carré, nous avons $n = \dfrac{a^2}{b^2}$, c'est à dire $a^2 = nb^2$; cette égalité montre que b divise a^2 *(Il suffit de voir que $a^2 = b \times (nb)$)*
Donc, d'après le lemme de Gauss [2], que b divise a : nous avons $a = bm$ avec $m \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
Nous venons de montrer l'implication : $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$; en prenant la contrapposée, nous avons $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Remarque 2 :

Les exemples précédents nous conduisent à construire un nouvel ensemble dans lequel les équations précédentes auront une ou des solutions.
Nous ne faisons pas de construction explicite de $\mathbb{R}$

7.2.2 Axiôme : Existence de $\mathbb{R}$

On admet l'existence d'un ensemble non vide $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels, muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre total.

Remarque 3 :

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels ; exemple : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 5 :

1. Montrer que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel

2. Revoir le cours d'arithmétique

Corrigé

Supposons que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe 2 entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$, c'est à dire, $q \ln 5 = p \ln 2$, et, en utilisant les propriétés du logarihme, $\ln 5^p = \ln 2^q \iff 5^p = 2^q$

Ce qui est impossible ; donc $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$

2. En déduire que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ est aussi irrationnel.

Corrigé

Comme précédemment, supposons que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe 2 entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$. Or, d'après les propriétés du logarithme, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, et donc, $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} = \dfrac{\ln 5 + \ln 2}{\ln 2} = 1 + \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$.

D'après le supposition que nous avons faite, nous avons : $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{p}{q} - 1$. Comme l'addition est interne dans $\mathbb{Q}$, nous avons $\dfrac{p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$ et donc $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est en contradiction avec la question précédente. Donc $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$

7.2.3 Propriété :

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \text{ alors } x \leqslant y \text{ ou bien } y \leqslant x$$

De plus,

- **La relation d'ordre est compatible avec l'addition,**
  Ce qui veut dire que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

- **La relation d'ordre est compatible avec la multiplication par un nombre positif,**
  Ce qui veut dire que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x \leqslant y) \text{ et } (z \geqslant 0) \Rightarrow xz \leqslant yz$$

Remarque 4 :

1. Nous avons, bien sûr, pour tout réel x et y
   - ▷ $(x < y) \Leftrightarrow (x \leqslant y)$ et $(x \neq y)$
   - ▷ $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (y \geqslant x)$
   - ▷ $(x > y) \Leftrightarrow (y < x)$
2. On pose $\mathbb{R}^{*+} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x > 0\}$ et $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{*+} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \geqslant 0\}$
3. De même, on pose $\mathbb{R}^{*-} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x < 0\}$ et $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{*-} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \leqslant 0\}$

7.2.4 Conséquences de la relation d'ordre

On admet, les propiétés suivantes vraies pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x+z \leqslant y+z) \Leftrightarrow (x \leqslant y)$	$(x+z < y+z) \Leftrightarrow (x < y)$
$(x \leqslant y) \Leftrightarrow (-y \leqslant -x)$	$(x < y) \Leftrightarrow (-y < -x)$
$(x \leqslant 0) \Leftrightarrow (-x \geqslant 0)$	$(x < 0) \Leftrightarrow (-x > 0)$
$(x > 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} > 0\right)$	$(x < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} < 0\right)$
$(0 < x < y) \Leftrightarrow \left(0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}\right)$	$(x < y < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0\right)$
$[(x \leqslant y)$ **et** $(z > 0)] \Leftrightarrow (xz \leqslant yz)$	$x^2 \geqslant 0$
$[(x < y)$ **et** $(z > 0)] \Leftrightarrow (xz < yz)$	$[(x < y)$ **et** $(z < 0)] \Leftrightarrow (xz > yz)$

7.2.5 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x**, et tout entier relatif strictement négatif** m**, on pose** $x^m = (x^{-m})^{-1}$
Nous avons ainsi défini $x^m = (x^{-m})^{-1}$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **et tout** $m \in \mathbb{Z}$

7.2.6 Propriétés des exposants

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **et tout** $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**, nous avons :**

1. $(xy)^n = x^n y^n$
2. $x^n x^p = x^{n+p}$
3. $(x^n)^p = x^{np}$
4. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
5. $\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$

7.2.7 Exercices

Exercice 6 :

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel
2. La somme de deux irrationnels est irrationnelle
3. Le produit de deux irrationnels est irrationnel
4. La somme d'un nombre irrationnel et d'un nombre rationnel est irrationnelle

Exercice 7 :

Soit r un rationnel et x un irrationnel. Montrer que $r + x$ et rx sont irrationnels

Exercice 8 :

X et Y sont des rationnels positifs, tels que $\sqrt{X} \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\sqrt{X} + \sqrt{Y} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 9 :

Montrer que $\log_{10}(2)$ n'est pas rationnel

Exercice 10 :

1. Démontrer que,quels que soient les nombres rationnels x et y :

$$\left(x + y\sqrt{2} = 0\right) \Longrightarrow (x = y = 0)$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, tout $y \in \mathbb{Q}$, tout $x' \in \mathbb{Q}$ et tout $y' \in \mathbb{Q}$

$$\left(x + y\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}\right) \Longrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$$

2. On appelle $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble :

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + y\sqrt{2} \text{ où } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\}$$

   Démontrer que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$

3. On considère un homomorphisme Φ du corps $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ dans lui même
   (a) Démontrer que, s'il existe $r \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ avec $r \neq 0$ tel que $\Phi(r) \neq 0$, alors $\Phi(1) = 1$
   (b) En déduire alors que, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $\Phi(a) = a$
   (c) Quelle est la laleur de $\left(\Phi\left(\sqrt{2}\right)\right)^2$
   (d) Démontrez que les seuls homomorphisme Φ de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ dans lui même et distincts de l'application nulle dont l'application identique et l'isimorphisme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \\ x + y\sqrt{2} & \longmapsto & x - y\sqrt{2} \end{array}\right.$$