7.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

7.3.1 Définition d'intervalles

1. **Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit l'ensemble $[a;b]$ par :**

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b\}$$

2. **Un <u>intervalle</u> non vide de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, nous avons $[x;y] \subset I$**

7.3.2 Définition d'ensemble convexe

On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est un convexe, si et seulement

$$(\forall (x,y) \in X \times X) \quad (\forall \lambda \in [0,1]) \quad (\lambda x + (1-\lambda)\, y \in X)$$

7.3.3 Proposition

1. **Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; on suppose $x \leqslant y$.**
   L'ensemble $A = \{u \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists \lambda \in [0;1] \text{ tel que } u = \lambda x + (1-\lambda)\, y\}$ est convexe et $A = [x;y]$
2. **Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, si et seulement si, c'est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est à dire si et seulement**

$$(\forall (x,y) \in I \times I) \quad ([x,y] \subset I)$$

<u>Démonstration</u>

1. **Démonstration du premier point**
   - <u>Démontrons que A est convexe</u>
     Soient $u \in A$, $v \in A$ et $\mu \in [0;1]$. Nous allons montrer que $\mu u + (1-\mu)\, v \in A$
     Comme $u \in A$, il existe $\lambda_u \in [0;1]$ tel que $u = \lambda_u x + (1-\lambda_u)\, y$; de même,$v = \lambda_v x + (1-\lambda_v)\, y$
     Donc :

$$\begin{aligned}
\mu u + (1-\mu)\, v = & \ \mu\,[\lambda_u x + (1-\lambda_u)\, y] + (1-\mu)\,[\lambda_v x + (1-\lambda_v)\, y] \\
= & \ [\mu\lambda_u + (1-\mu)\,\lambda_v]\, x + [\mu\,(1-\lambda_u) + (1-\mu)\,(1-\lambda_v)] \\
= & \ [\mu\lambda_u + (1-\mu)\,\lambda_v]\, x + [\mu - \mu\lambda_u + 1 - \lambda_v - \mu + \mu\lambda_v]\, y \\
= & \ [\mu\lambda_u + (1-\mu)\,\lambda_v]\, x + [1 - (\mu\lambda_u + (1-\mu)\,\lambda_v)]\, y
\end{aligned}$$

     Donc, $\mu u + (1-\mu)\, v \in A$ et A est convexe
   - <u>Démontrons que $A = [x;y]$</u>
     — <u>Tout d'abord, $A \subset [x;y]$</u>
       Soit $u \in A$; alors $u = \lambda x + (1-\lambda)\, y$ où $\lambda \in [0;1]$. Or :

$$u - x = \lambda x + (1-\lambda)\, y - x = (1-\lambda)\,(y-x) \geqslant 0$$

       Donc $u \geqslant x$.
       On démontrait de même que $u \leqslant y$ et donc $u \in [x;y]$

— Réciproquement, montrons que $[x;y] \subset A$
Soit $u \in [x;y]$, c'est à dire que $x \leqslant u \leqslant y$. Il faut trouver $\lambda_u \in [0;1]$ tel que $u = \lambda_u x + (1-\lambda_u)\,y$. S'il existe, nous avons $\lambda_u = \dfrac{u-y}{x-y}$.
Clairement, nous avons $\dfrac{u-y}{x-y} \geqslant 0$ et donc $\lambda_u \geqslant 0$.
D'autre part, $\dfrac{u-y}{x-y} - 1 = \dfrac{u-y-(x-y)}{x-y} = \dfrac{u-x}{x-y} \leqslant 0$ et donc $\lambda_u \leqslant 1$
Ainsi, $u \in A$ et $[x;y] \subset A$
Donc $[x;y] = A$

2. **Pour le second point**
Le second point est la redite du premier : un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe, et un convexe est un intervalle

7.3.4 Notations

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit les ensembles suivants qui sont des intervalles de $\mathbb{R}$:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a \leqslant x \leqslant b\}$	$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a < x < b\}$
$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a < x \leqslant b\}$	$[a,b[= \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a \leqslant x < b\}$
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a \leqslant x\}$	$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $a < x\}$
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $x \leqslant b\}$	$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}$ **tq** $x < b\}$

Exercice 11 :

Démontrer, par exemple que $[a,b[$ est un intervalle

Exercice 12 :

1. Soit $c : [0;1] \longrightarrow [a,b]$ une fonction définie pour tout $t \in [0;1]$ par $c(t) = (1-t)\,a + tb$. Montrer que c est une bijection et calculer c^{-1}
2. Trouver une bijection de $]0;1[$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. En déduire une bijection de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$

7.3.5 Valeur absolue

On appelle valeur absolue de x le nombre $|x| = \max\{x,-x\}$
On a donc :

— **Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$**

— **Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$**

Remarque 5 :

Voici un petit programme Python, définissant une fonction retournant la valeur absolue d'un nombre réel :

```
def abs(x):
        if x<0:
                return -x
        else :
                return x
```

7.3.6 Propriétés de la valeur absolue

1. $(x=0) \Leftrightarrow (|x|=0)$, **et pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$
2. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}$, **nous avons** $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
3. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **et tout** $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
   - **(a)** $(|x|=\alpha) \Leftrightarrow x \in \{\alpha, -\alpha\}$
   - **(b)** $(|x| \leqslant \alpha) \Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$
   - **(c)** $(|x| < \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\alpha; \alpha[$
   - **(d)** $(|x| \geqslant \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\alpha] \cup [\alpha; +\infty[$
   - **(e)** $(|x| > \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty]$
4. **Pour tout** $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, **nous avons** $|xy| = |x|\,|y|$
5. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}^*$, **nous avons** $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$
6. **En généralisant : pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **et tout** $x \in \mathbb{R}$, $|x^n| = (|x|)^n$
7. **De même, pour tout** $x \in \mathbb{R}^*$, **et tout** $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{|x^n|} = \frac{1}{(|x|)^n}$
8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\left(x^2 = y^2\right) \Leftrightarrow (|x| = |y|)$
9. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\left(x^2 \leqslant y^2\right) \Leftrightarrow (|x| \leqslant |y|)$

Démonstration

La démonstration est simple et est laissée au lecteur

7.3.7 Ensemble borné

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
A **est borné, si et seulement si il existe** $M > 0$ **tel que pour tout** $x \in A$, $|x| \leqslant M$

Démonstration

1. Il est clair que, si A est tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$, cette inégalité est équivalente à $-M \leqslant x \leqslant M$, et donc que A est borné.
2. Supposons A borné. Il existe alors a et b tels que, pour tout $x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$. En posant $M = \max\{|a|, |b|\}$, nous avons alors $-M \leqslant x \leqslant M$, ce qui est équivalent à $|x| \leqslant M$

Remarque 6 :

Il est évident que le M de 7.3.7 dépend de A.

7.3.8 Inégalité triangulaire

1. **Pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **et tout** $y \in \mathbb{R}$, **nous avons l'inégalité suivante, appelée inégalité triangulaire**

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|}$$

2. **Dans l'inégalité précédente, nous avons l'égalité**

$$|x+y| = |x| + |y|$$

si, et seulement si x **et** y **sont de même signe.**

Démonstration

Démontrons l'inégalité triangulaire
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors nous avons :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ et } -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

Et en additionnant :

$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

D'où $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

7.3.9 Généralisation

Pour tout réel $x_1, \cdots, x_n$, nous avons :

1. $\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k|$
2. $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$**, et on a l'égalité** $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ **si et seulement si, tous les** $x_1, \cdots, x_n$ **sont de même signe.**

Démonstration

Une récurrence simple démontre ces généralisations

Exercice 13 :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

7.3.10 Définition de distance

Pour tout réel $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le nombre $d(x, y) = |x - y|$ représente une distance ; c'est la distance qui sépare x de y
Cette distance vérifie quatre axiômes vrais pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} d(x, y) \geqslant 0 \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \end{cases}$$

Remarque 7 :

Voici une fonction Python `distance` qui calcule la distance entre 2 réels x et y :

```
#On définit d'abord la valeur absolue
def abs(x):
        if x<0:
                return -x
        else :
                return x
#On utilise la valeur absolue pour définir la distance
def distance(x,y):
        return abs(x-y)
```

Remarque 8 :

La propriété de la distance $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ est **l'inégalité triangulaire** $|x - y| \leqslant |x| + |y|$
Nous avons en particulier : $|x - z| = |x - y + y - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$

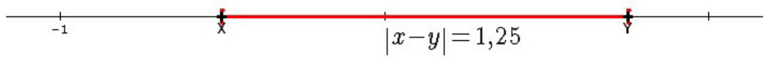

FIGURE 7.3 – Le point x a pour abscisse $-0,5$, alors que le point y a pour abscisse $+0,75$ et la distance qui sépare x de y est $1,25$

7.3.11 Intervalles et valeur absolue

On peut définir un intervalle fermé ou un intervalle ouvert à l'aide des valeurs absolues :

— $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|b-a|}{2}\right\}$

— $]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right| < \frac{|b-a|}{2}\right\}$

Exemple 4 :

1. $[-1,+1] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x| \leqslant 1\}$
2. $]1,2[= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\frac{3}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}\right\}$

7.3.12 Quelques exercices

Exercice 14 :

Soient a, b et c trois réels tels que $a < b < c$; donner le minimum de

$$|x-a| + |x-b| + |x-c|$$

lorsque $x \in \mathbb{R}$

Exercice 15 :

1. Montrer que $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$
   Ces "formules" sont utilisées pour démontrer la continuité de max{f,g} ou min{f,g}
2. La fonction $\max(x,y)$ fait partie des fonctions standard d'un ordinateur. Comment peut-on avoir $\max(x,y,z)$ et $\max(x,y,z,u)$, à l'aide de la seule fonction $\max(x,y)$?