7.4 Insuffisance de $\mathbb{Q}$ quant à l'ordre Axiôme de la borne supérieure

Dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, tout sous ensemble, non vide et majoré admet une borne supérieure, et même un plus grand élément ; ceci est faux dans l'ensemble des rationneles.

7.4.1 Exemple introductif

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q}^{*+} \text{ tq } x^2 \leqslant 2\right\}$$

E est, par définition, un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

1. $E \neq \emptyset$ car $1 \in E$; et il y en a d'autres comme par exemple : $\dfrac{3}{4} \in E$
2. E est un ensemble majoré car 2 est un majorant de E

   En effet, si $x \in E$, alors $x^2 \leqslant 2 < 2^2$ et on tire de cette inéquation $|x| < 2$, c'est à dire $x < 2$. E est donc non vide et **majoré dans** $\mathbb{Q}$
3. Supposons que E admette un plus grand élément, et soit a ce plus grand élément ; on note : $a = \max E$.

   Comme $a \in E$, alors $a^2 \leqslant 2$, et comme il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$, on a sûrement $a^2 < 2$.
4. Nous allons prouver qu'il existe $b \in E$ tel que $a < b$; ce qui contredira le fait que $a = \max E$

   Pour que b existe, nous devons donc avoir :

   $$\begin{cases} b = a + \lambda \\ b^2 \leqslant 2 \end{cases}$$

   Avec $\lambda > 0$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$

   De $b^2 \leqslant 2$, et en développant $b^2 = (a+\lambda)^2$, on obtient

   $$\lambda(\lambda + 2a) + \left(a^2 - 2\right) \leqslant 0$$

   d'où on tire : $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+\lambda}$
5. De $a = \max E$, nous tirons $1 \leqslant a$ donc, $-2 < -a^2 \leqslant -1 \Leftrightarrow 0 < 2 - a^2 \leqslant 1$ et, indépendamment, nous tirons $1 \leqslant 3 \leqslant 2a+1$ c'est à dire, en conclusion, $0 < \dfrac{1}{2a+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$ et, mieux, $0 < \dfrac{2-a^2}{2a+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$
6. En choisissant $0 < \lambda < 1$, le choix de λ tel que $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+1}$ convient . En effet, de $0 < \lambda < 1$, on tire $2a + \lambda < 2a+1$ et donc, $\dfrac{1}{2a+1} < \dfrac{1}{2a+\lambda}$, et donc, $\dfrac{2-a^2}{2a+1} < \dfrac{2-a^2}{2a+\lambda}$; un rationnel λ telque $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+1}$ convient donc.
7. Nous avons donc $b = a + \lambda$, tel que $b > a$ et $b \in E$. E n'a donc pas de plus grand élément.

7.4.2 Axiôme de la borne supérieure

Toute partie $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée admet une borne supérieure

Remarque 9 :

1. C'est un axiôme très important, qui construit l'ensemble des nombres réels
2. Qu'est ce que cela veut dire ? Voici une réécriture de l'axiôme de la borne supérieure :

   A est non vide et majorée, c'est à dire :

   $$(\exists M \in \mathbb{R}) \text{ tq } (\forall x \in A)\,(x \leqslant M)$$

A **admet une borne supérieure** c'est à dire : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (\forall x \in A)\,(x \leqslant \alpha) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in A)\,(\alpha - \varepsilon < x) \end{cases}$$

3. Les conditions définissant le réel α signifient que :
   (a) α est un majorant de A
   (b) Tout réel x inférieur à α n'est plus un majorant de A
4. Ce qui veut dire que α est le plus petit des majorants ; à ce titre, il est unique on l'appelle **la borne supérieure** de A et on le note : $\alpha = \sup A$

L'ensemble des majorants de A est alors l'ensemble $[\alpha; +\infty[$

7.4.3 Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie non vide et minorée ; alors, $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Remarque 10 :

1. **Qu'est ce que cela veut dire ?**
   A **est minorée,** c'est à dire : $(\exists m \in \mathbb{R})$ tq $(\forall x \in A)\,(m \leqslant x)$
   A **admet une borne inférieure** c'est à dire : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ ***tel que***

$$\begin{cases} (\forall x \in A)\,(\alpha \leqslant x) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in A)\,(x < \alpha + \varepsilon) \end{cases}$$

2. Comme précédemment, les conditions définissant le réel α signifient que :
   (a) α est un minorant de A
   (b) Tout réel x supérieur à α n'est plus un minorant de A
3. Ce qui veut dire que α est le plus grand des minorants ; à ce titre, il est unique on l'appelle la borne inférieure de A et on le note : $\alpha = \inf A$

L'ensemble des minorants de A est alors l'ensemble $]-\infty; \alpha]$

7.4.4 Liens entre borne supérieure, borne inférieure, plus grand et plus petit élément

1. **A est un ensemble majoré, et M un majorant de A est équivalent à**

$$\boxed{(\forall a \in A)\,((M \geqslant a) \Leftrightarrow (M \geqslant \sup A))}$$

2. **A est un ensemble minoré, et m un minorant de A est équivalent à**

$$\boxed{(\forall a \in A)\,((m \leqslant a) \Leftrightarrow (m \leqslant \inf A))}$$

7.4.5 Les résultats suivants sont classiques :

1. $\sup([a;b]) = \sup([a;b[) = \sup(]a;b]) = \sup(]a;b]) = \sup(]-\infty;b]) = \sup(]-\infty;b[) = b$
2. $\inf([a;b]) = \inf([a;b[) = \inf(]a;b]) = \inf(]a;b]) = \inf(]a;+\infty]) = \inf([a;+\infty[) = a$

7.5 Conséquences de l'axiôme de borne supérieure

7.5.1 Axiôme d'Archimède

$\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est à dire :

$$\left(\forall a \in \mathbb{R}^{*+}\right)(\forall b \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(na > b)$$

Remarque 11 :

Cette propriété peut aussi s'écrire :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n > x)$$

Il suffit de faire dans 7.5.1 $a = 1$ et $b = x$

7.5.2 Partie entière d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors, il existe un entier relatif unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$
Cet entier $n \in \mathbb{Z}$ est appelé partie entière de $x \in \mathbb{R}$, et on la note : $n = \mathrm{E}(x) = [x]$; on a donc

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1 \Longleftrightarrow [x] \leqslant x < [x] + 1$$

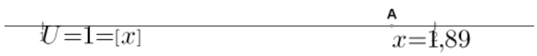

FIGURE 7.4 – Schématisation de la partie entière : ici, $[1,89] = 1$

Démonstration

1. **Existence de la partie entière**
   - ▷ Si x est un entier, alors il suffit de prendre $[x] = x$
   - ▷ Si x n'est pas un entier et est positif, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.
     On a donc, pour tout a strictement positif, il existe un entier naturel non nul n tel que $x < na$ et nous l'appliquons à $a = 1$
     Il existe donc un entier naturel non nul n tel que $x < n$
     Soit A_x l'ensemble des entiers naturels non nuls supérieurs à x :
     $$A_x = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } n > x\}$$
     A_x est non vide.
     D'après l'un des axiomes de $\mathbb{N}$ il contient donc un plus petit élément. En notant p ce plus petit élément, nous avons donc que $x < p$ et $p - 1 \leqslant x$
     Il suffit alors de prendre $[x] = p - 1$
   - ▷ Si x n'est pas un entier et est négatif, on applique le raisonnement précédent sur $-x$
     Nous aboutissons alors à l'existence d'un entier naturel $[-x]$ tel que $[-x] \leqslant -x < [-x] + 1$
     Et donc $-[-x] - 1 < x \leqslant [-x]$
     Comme x n'est pas entier, on a même$-[-x] - 1 < x < [-x]$
     On prend alors $[x] = -[-x] - 1$

2. **Unicité de la partie entière**

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et n_1 et n_2 deux entiers tels que $\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ n_2 \leqslant x < n_2 + 1 \end{cases}$

   C'est à dire que n_1 et n_2 sont 2 parties entières de x, et nous allons montrer que $n_1 = n_2$

   Alors on a $\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ -n_2 - 1 < -x \leqslant -n_2 \end{cases}$

   En additionnant chacune des inégalités, on a donc $n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1$

   En prenant l'inégalité de gauche, on a donc $n_1 - n_2 - 1 < 0$ donc $n_1 - n_2 < 1$

   Et, comme il s'agit d'entiers $n_1 - n_2 \leqslant 0$

   En prenant l'inégalité de droite, on a donc $0 < n_1 - n_2 + 1$ donc $-1 < n_1 - n_2$

   Et comme il s'agit d'entiers $0 \leqslant n_1 - n_2$

   Nous avons donc : $0 \leqslant n_1 - n_2 \leqslant 0$ donc $n_1 - n_2 = 0$, c'est à dire $n_1 = n_2$

   La partie entière est donc unique.

Remarque 12 :

Il faut veiller à ne pas confondre **partie entière** et **troncature**.
Exemple, pour $x = -1,89$, nous avons $[-1,89] = -2$, alors que la troncature de $-1,89$ donne -1

Exercice 16 :

1. Avons nous, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[nx] = n\,[x]$?
2. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx]$$

7.5.3 Congruence modulo a

Soient $x \in \mathbb{R}$, et a un réel strictement positif.
Alors, il existe un unique couple $(n, y) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = na + y$.
On dit alors que x est congru à y modulo a, et on écrit $x \equiv y\,[a]$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$, et a un réel strictement positif ; il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \frac{x}{a} < n+1$; c'est très simplement la partie entière de $\frac{x}{a}$; on a donc $n = \left[\frac{x}{a}\right]$
Nous avons alors $an \leqslant x < an + a$, ce qui est équivalent à $0 \leqslant x - an < a$; en posant $y = x - an$, nous avons le résultat.

7.5.4 Propriétés

1. **La relation de congruence est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$**
2. **Chaque classe d'équivalence a un unique représentant dans $[0, a[$ ou dans $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$**
3. **Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$** $\quad (x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow (x + \lambda \equiv y + \lambda\ [a])$
4. **Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$** $\quad (x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow (\lambda x \equiv \lambda y\ [a])$

Exemple 5 :

1. Les exemples les plus importants sont empruntés à la trigonométrie :
   (a) $(\tan x = \tan y) \Leftrightarrow (x \equiv y\ [\pi])$
   (b) $(\cos x = 1) \Leftrightarrow (x \equiv 0\ [2\pi])$
   (c) $(\sin 2x = 0) \Leftrightarrow \left(x \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$

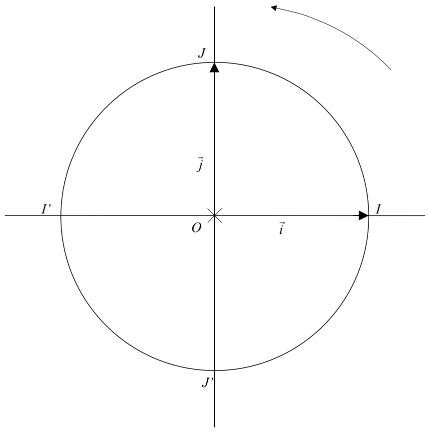

FIGURE 7.5 – Le cercle trigonométrique

2. On trouve d'autres exemples dans la théorie de l'information, avec la congruence modulo 1