7.6 Ensembles denses dans $\mathbb{R}$

7.6.1 Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,[(x < y) \Longrightarrow (\exists r \in \mathbb{Q})\,(x < r < y)]$$

En d'autres termes, entre deux réels, il y a toujours au moins un rationnel.

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés une fois pour toutes et tels que $x < y$.
Comme les rationnels s'écrivent $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, le problème est donc de trouver 2 entiers p et q, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$x < \frac{p}{q} < y \Longleftrightarrow qx < p < qy$$

1. **Condition d'existence de p et q**
   Soit q entier tel que $q \in \mathbb{N}^*$; alors, p existe sûrement si $1 < qy - qx \Leftrightarrow q > \dfrac{1}{y-x}$ *(on choisira un entier ou l'entier situé entre qx et qy)*
2. On pose donc, d'après 1 $q = \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$; d'après les propriétés des parties entières, nous avons $\left[\dfrac{1}{y-x}\right] \leqslant \dfrac{1}{y-x} < \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$, c'est à dire $\dfrac{1}{y-x} < q$, ce qui montre que p existe sûrement
3. On pose $p = [qx] + 1$, donc $[qx] \leqslant qx < p$, c'est à dire, $x < \dfrac{p}{q}$ *(on a trouvé une inégalité ! ! il faut maintenant montrer l'autre ! !)*
4. De $\dfrac{1}{y-x} < q$, il faut remarquer 2 choses : la première, simple : $0 < q$, et la seconde : $\left(\dfrac{1}{q} < y - x\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{q} + x < y\right)$
5. Comme $0 < q$ et que $[qx] \leqslant qx < [qx] + 1$, en divisant par $q > 0$, on obtient :

$$\frac{[qx]}{q} \leqslant x < \frac{[qx]+1}{q} = \frac{[qx]}{q} + \frac{1}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < y$$

En choisissant $q = \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$ et $p = [qx] + 1$, nous avons donc bien montré $x < \dfrac{p}{q} < y$; ce que nous voulions.

Remarque 13 :

1. On peut même dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il y a une infinité de rationnels. Il suffit, pour cela, de découper l'intervalle $]x, y[$ en n intervalles de longueurs égales :
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_k = x + \dfrac{k\,(y-x)}{n}$ avec $k = 0, \cdots, n$ entre les réels x_k et x_{k+1} (ou dans l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$), il y a au moins rationnel r_k
2. Mieux, Tout intervalle contient au moins un irrationnel :
   Partant de x et y tels que $x < y$, on peut appliquer l'implication de l'affirmation 7.6.1 aux réels $x - \sqrt{2}$ et $y - \sqrt{2}$
   On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $\left]x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}\right[$, et par translation $x < r + \sqrt{2} < y$. Or, $r + \sqrt{2}$ est irrationnel, car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   On a donc montré que si $x < y$, alors l'intervalle $]x, y[$ contient aussi un irrationnel.
3. On démontrerait, comme ci-dessus, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il y a une infinité d'irrationnels. Ainsi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

7.6.2 Autre ensemble denses dans $\mathbb{R}$: l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geqslant 2$
Soit $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right] = \left\{q \in \mathbb{Q} \text{ tels que } q = n + \sum_{k=1}^{m} a_k d^{-k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ , } a_k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant a_k < d\right\}$$

Alors $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration

Soient $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$

1. **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $d^{-n}[d^n x] \leqslant x < d^{-n}[d^n x] + d^{-n}$**
   Par définition de la partie entière, $[d^n x] \leqslant d^n x < [d^n x] + 1$; le résultat demandé est obtenu en multipliant l'inégalité par d^{-n}
2. **Appelons $u_n = d^{-n}[d^n x]$ et $v_n = u_n + d^{-n}$; montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$**
   D'après la question précédente, nous avons : $u_n \leqslant x < v_n$, ou encore, $u_n \leqslant x < u_n + d^{-n}$.
   Cette dernière inégalité est équivalente à $0 \leqslant x - u_n < d^{-n}$
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} d^{-n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} (x - u_n) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = x$.
   Comme $v_n = u_n + d^{-n}$, nous avons aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = x$
3. **On construit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $a_n = d^n(u_n - u_{n-1})$; montrer que $a_n \in \mathbb{Z}$**
   Il suffit de réécrire a_n
   $$a_n = d^n(u_n - u_{n-1}) = d^n\left(d^{-n}[d^n x] - d^{-(n-1)}\left[d^{(n-1)} x\right]\right)$$
   et alors, $a_n = [d^n x] - d\left[d^{(n-1)} x\right]$, ce qui montre que $a_n \in \mathbb{Z}$
4. **En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant x < u_n + d^{-n}$, montrons que $-1 < a_n < d$, et que a_n ne peut donc prendre que d valeurs : 0 et $d-1$**
   On peut écrire l'inégalité à l'ordre n et à l'ordre $n-1$
   $$\left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant x < u_n + d^{-n} \\ u_{n-1} \leqslant x < u_{n-1} + d^{-n+1} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant x < u_n + d^{-n} \\ -u_{n-1} - d^{-n+1} < -x \leqslant -u_{n-1} \end{array}\right.$$
   Ce qui donne, en additionnant,
   $$u_n - u_{n-1} - d^{-n+1} < 0 < u_n + d^{-n} - u_{n-1}$$
   Ce qui, traduit autrement, nous donne : $-d^{-n} < u_n - u_{n-1} < d^{-n+1}$; en multipliant l'inégalité par d^n, nous obtenons l'inégalité demandée ; comme $a_n \in \mathbb{Z}$, les seules valeurs admissibles de a_n sont donc entières et comprises entre 0 et $d-1$
5. **Pour $n \geqslant 1$, démontrons que $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} a_p d^{-p} + u_0$**
   (a) Il faut d'abord remarquer que $u_0 = d^{-0}\left[d^0 x\right] = [x]$
   (b) Puis, de l'identité $a_n = d^n(u_n - u_{n-1})$, nous pouvons déduire $u_n - u_{n-1} = a_n d^{-n}$, puis en faisant la somme
   $$\begin{array}{rl} u_1 - u_0 = & a_1 d^{-1} \\ u_2 - u_1 = & a_2 d^{-2} \\ u_3 - u_2 = & a_3 d^{-3} \\ \vdots & \vdots \\ u_n - u_{n-1} = & a_n d^{-n} \end{array}$$

nous obtenons, après simplification $u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$, c'est à dire $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$, ce que nous voulions

6. **En déduire que l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$** La conclusion est évidente, puisque, chaque u_n est en fait un élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ et que $\lim_{n\to+\infty} = x$

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existera $u_n \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ tel que $x < u_n < y$

Remarque 14 :

1. On démontre très facilement que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est un sous anneau de $\mathbb{Q}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, le développement $u_n = [x] + \sum_{k=1}^{m} a_k d^{-k}$ est une approximation de x à d^{-n} près
3. Il y a des développements bien connus et beau coup utilisés :
   — Les décimaux $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ utilisés massivement dans la vie courante
   — Les dyadiques $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ beaucoup utilisés en informatique

   La densité des dyadiques dans $\mathbb{R}$, montre qu'il est justifié de n'utiliser, en informatique, que la base 2

   En informatique, les nombres sont représentés en base 2, par des dyadiques. Ce choix n'est pas plus mauvais qu'un autre, que celui de la base décimale utilisée plus couramment, par exemple.

   Exemple de dyadique : $\left(\overline{101,0010111011}\right)_2$
4. Un élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est un rationnel, mais la réciproque est fausse

   Exemple : Un dyadique est un rationnel, mais la réciproque est fausse.

   Soit D un nombre dyadique ; alors, $D = \mathrm{E}(D) + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$; il suffit ensuite de réduire au même dénominateur 2^n, pour montrer que $D \in \mathbb{Q}$.

   Cependant, il existe des rationnels qui ne sont pas des dyadiques ; il suffit par exemple, de prendre $\frac{1}{3}$; nous avons $\frac{1}{3} = \left(\overline{0,010101010101\cdots010101\cdots}\right)_2 = \left(\overline{0,\overline{01}}\right)_2$; le développement de $\frac{1}{3}$ en base 2 étant infini, ce n'est donc pas un dyadique

7.6.3 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont :

— **Ou bien de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$**

$$a\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = an \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$$

— **Ou bien sont denses dans $\mathbb{R}$**

Démonstration

1. Soit $a \in \mathbb{R}$; alors, de manière évidente, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$
2. Soit, maintenant, G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$
   (a) Si $G = \{0\}$, alors, G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ *(trivial)* et, en fait, $G = 0\mathbb{Z}$

(b) Supposons $G \neq \{0\}$; alors, G contient certainement des nombres strictement positifs et donc $A = G \cap]0; +\infty[$ est surement non vide. A étant un ensemble minoré *(par 0)* admet une borne inférieure ; soit a cette borne inférieure ; nous avons donc $a = \inf A$

i. **Supposons $a \neq 0$ *(c'est à dire* $a > 0$**

▷ Montrons que $a \in G$

On fait une démonstration par l'absurde en supposant le contraire, c'est à dire que $a \notin G$

Alors, $2a = a + a$ est tel que $2a > a$. a étant la borne inférieure de A *(le plus grand des minorants)* il existe $b \in A$ tel que

$$a \leqslant b < 2a$$

Comme $b \in G$ et $a \notin G$, nous avons $a \neq b$ et donc $a < b < 2a$

De même, comme $b > a$, il existe $c \in A$ tel que $a < c < b$, ce qui nous donne $b - c > 0$ et des inégalités $b < 2a$ et $-c < -a$, par addition, $b - c < a$.

Or, b_inG et $c \in G$, et donc $b - c \in G$; or, $b - c < a$, ce qui est en contradiction avec la définition de a

Donc, $a \in G$ et donc $a\mathbb{Z} \in G$

▷ Réciproquement, soit $g \in G$

Nous allons montrer que g est du type ka avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $g_1 = \left[\dfrac{g}{a}\right] a$. Alors, $g_1 \in a\mathbb{Z}$ et comme nous avons démontré que $a \in G$, $g_1 \in G$.

De $\left[\dfrac{g}{a}\right] \leqslant \dfrac{g}{a} < \left[\dfrac{g}{a}\right] + 1$, on tire, en multipliant par a

$$a\left[\frac{g}{a}\right] \leqslant g < a\left[\frac{g}{a}\right] + a \Longleftrightarrow g_1 \leqslant g < g_1 + a$$

Et donc, $0 \leqslant g - g_1 < a$. Or, $g - g_1 \in G$ et donc, $g - g_1 = 0$, c'est à dire $G \subset a\mathbb{Z}$

▷ Donc, de $a\mathbb{Z} \subset G$ et de $G \subset a\mathbb{Z}$, on déduit que $G = a\mathbb{Z}$

ii. **Supposons $a = 0$; on montre que G est dense dans $\mathbb{R}$**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Il va falloir montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha < g < \beta$

Premièrement, $\beta - \alpha > 0$, et donc $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$ n'est pas un minorant de $A = G \cap]0; +\infty[$; il existe donc $g \in A$ tel que $g < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$; g étant strictement positif, nous avons $0 < g < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$

Soit $g_1 = \left[\dfrac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] g$. Alors, de la fonction partie entière, nous tirons

$$\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] \leqslant \frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g} < \left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] + 1$$

Et donc, en multipliant par g

$$g\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] \leqslant \frac{\beta + \alpha}{2} < g\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] + g \Longleftrightarrow g_1 \leqslant \frac{\beta + \alpha}{2} < g_1 + g$$

D'où $\dfrac{\beta + \alpha}{2} - g < g_1 \leqslant \dfrac{\beta + \alpha}{2}$

De l'inégalité $0 < g < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, nous tirons $\dfrac{\alpha - \beta}{2} < -g < 0$, et en additionnant $\dfrac{\beta + \alpha}{2}$, nous obtenons : $\alpha < \dfrac{\beta + \alpha}{2} - g < \dfrac{\beta + \alpha}{2}$

Et donc :

$$\alpha < \frac{\beta + \alpha}{2} - g < g_1 \leqslant \frac{\beta + \alpha}{2}$$

Et comme $\dfrac{\beta + \alpha}{2} < \beta$, il existe $g_1 \in G$ tel que $\alpha < g_1 < \beta$

7.6.4 Conséquence

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Considérons $G(a,b) = \{ap + bq \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\}$
Clairement, $G(a,b)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Il y a donc 2 possibilités :
- Ou bien $G(a,b)$ est dense dans $\mathbb{R}$
- Ou bien il exist ec $\in \mathbb{R}$ tel que $G(a,b) = c\mathbb{Z}$

Résultat

$G(a,b) = \{ap + bq$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}\} = c\mathbb{Z}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Démonstration

1. Supposons $G(a,b) = c\mathbb{Z}$
   Si $a = 0$ ou $b = 0$, il n'y a pas de problème. Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
   Alors :
   - ▷ Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = a \times 1 + b \times 0 = cm$
   - ▷ De même, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a \times 0 + b \times 1 = cn$

   Et donc, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{cm}{cn} = \dfrac{m}{n}$ et donc $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
2. Réciproquement, supposons $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
   Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ avec $m \wedge n = 1$ et donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \Longleftrightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \lambda$
   C'est à dire que $a = \lambda m$ et $b = \lambda n$; autrement dit, $a \in \lambda\mathbb{Z}$ et $b \in \lambda\mathbb{Z}$
   Donc, pour tout $g \in G(a,b)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que :
   $$g = ka + k'b = k\lambda m + k'\lambda n = \lambda(km + k'n)$$
   Et donc, $g \in \lambda\mathbb{Z}$, c'est à dire $G(a,b) \subset \lambda Z$
   m et n étant premiers entre eux ($m \wedge n = 1$), d'après l'identité de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $mu + nv = 1$.
   En multipliant par λ, nous obtenons :
   $$\lambda mu + \lambda nv = \lambda \Longleftrightarrow \frac{a}{m} \times mu + \frac{b}{n} \times nv = \lambda \Longleftrightarrow au + bv = \lambda$$
   Ce qui montre que $\lambda \in G(a,b)$ et donc que $\lambda Z \subset G(a,b)$
   Donc, $\lambda Z = G(a,b)$

Ce qu'il fallait démontrer

7.6.5 Application

1. **Si x est irrationnel, alors l'ensemble**
   $$G(x,1) = \{mx + n \text{ où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$
   est dense dans $\mathbb{R}$
2. **En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que**
   $$a < mx + n < b$$