7.7 Des exercices sur les nombres réels

Exercice 17 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note toujours $[x]$ la partie entière de x. Démontrez que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, nous avons :

1. $[x+y] = [x] + [y] + \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$
2. $[x-y] = [x] - [y] - \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$

Exercice 18 :

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left[\dfrac{[nx]}{n}\right] = [x]$

Exercice 19 :

Démontrer que si B est majorée, et que si $A \subset B$, alors, A est majorée et $\sup A \leqslant \sup B$

Exercice 20 :

Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a| < |a|$. Démontrer que $a - |a| < x < a + |a|$ et en déduire que x est du signe de a

Exercice 21 :

Soit $x \geqslant 0$ un nombre réel tel que $x \neq \sqrt{3}$. Posons $y = \dfrac{x+3}{x+1}$. Calculer $\dfrac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ et en déduire que $y - \sqrt{3} < x - \sqrt{3}$

Exercice 22 :

1. Montrer que l'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ est un intervalle majoré. En déduire $\sup A$
2. Montrer que l'ensemble $B = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ est majoré mais n'est pas un intervalle. En déduire $\sup B$

Exercice 23 :

Pour comparer deux quantités, on en fait la différence . Utiliser cette remarque pour faire les questions suivantes.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left(x^2 - x \geqslant -\dfrac{1}{4}\right)$
3. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, nous avons : $a + b < \left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)$

Exercice 24 :

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, nous avons $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. En déduire que pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$

Exercice 25 :

x et y sont 2 réels strictement positifs.On définit a, g et h par : :

1. $a = \dfrac{x+y}{2}$
2. $g = \sqrt{xy}$
3. $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

Comparez a, g et h

Exercice 26 :

Soit $(a_n)_{n_i n\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On considère alors la suite $(x_n)_{n_i n\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$P(n): \ x_n \geqslant n^2$$

1. Démontrer $P(1)$
2. Démontrer que la propriété est héréditaire, c'est à dire que
$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$
3. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \geqslant n^2$. Dans quel cas avons nous $x_n = n^2$?

Exercice 27 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $a \geqslant 2\sqrt{a-1}$
2. Pour $a \geqslant 1$, simplifier, en fonction des valeurs de a, l'expression
$$y = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$
(Etudier le signe de y, puis élever au carré)

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|x+1| + 1 \geqslant \left|x^2 - 6x\right|$

Exercice 29 :

Ecrire, à l'aide d'intervalles le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \, |x-1| \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} / \, |2x-1| > 4\}$$

Exercice 30 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $y \geq 2$;

1. Donner un encadrement de $x + y$, xy, $\dfrac{x}{y}$
2. Montrer que $\left|\dfrac{x}{y}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 31 :

1. Soient
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant +1\right\}$$
et
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -3 \leqslant y - x \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant x + y \leqslant +3\right\}$$
   (a) Montrer que nous avons $A \subset B$
   (b) Montrer que nous avons $B \not\subseteq A$

2. Soit
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } |y| \leqslant \frac{3}{2}\right\}$$
   (a) Montrer que nous avons $B \subset C$
   (b) Montrer que nous avons $C \nsubseteq B$

Exercice 32 :

On donne les encadrements suivants : $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$ et $1,73 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,74$

1. En déduire des encadrements *(avec 2 chiffres après la virgule)* pour les quantités suivantes :

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{6}$ (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. De même encadrer les quantités ci-dessous :

   (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ (c) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

Exercice 33 :

Rappel : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices 2×2 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ à coefficients réels, où, chacun des $x_i \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice nulle, c'est à dire que $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $\|M\|_{+\infty} = \max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$.
   (a) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; donnez $\|A\|_{+\infty}$, $\|B\|_{+\infty}$ et $\|A+B\|_{+\infty}$
   (b) Montrer que $\|M\|_{+\infty} = 0$ si et seulement si $M = \mathcal{O}$
   (c) Montrer que pour tout $M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous avons : $\|M_1+M_2\|_{+\infty} \leq \|M_1\|_{+\infty} + \|M_2\|_{+\infty}$
   (d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda M_1\|_{+\infty} = |\lambda|\,\|M_1\|_{+\infty}$
2. On note de plus, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$$\|M\|_1 = |a|+|b|+|c|+|d| \quad \text{et} \quad \|M\|_2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$
   (a) Montrer que $\|M\|_\infty \leqslant \|M\|_1 \leqslant 4\times\|M\|_\infty$
   (b) Montrez que $\|M\|_\infty \leqslant \|M\|_2 \leqslant 2\,\|M\|_\infty$
   (c) En déduire que $\dfrac{1}{4}\|M\|_1 \leqslant \|M\|_2 \leqslant 2\,\|M\|_1$

Exercice 34 :

1. émontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$
2. Calculer la partie entière du nombre réel $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 35 :

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x.

1. Montrer que $\{x\} \in [0, 1[$
2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel et f de $\mathbb{N}$ dans $[0, 1[$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & [0, 1[\\ \quad n & \longmapsto & f(n) = \{n\theta\} \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est injective

   (b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \neq n$ et $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$

   (c) En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 36 :

Introduction aux inégalités de Schwarz

Nous nous plaçons dans l'ensembles $\mathbb{C}$ des nombres complexes, mais les méthodes de résolution ont tout des nombres réels

1. Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que

$$2\,|zz'| \leqslant t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2$$

2. Soient $\{a_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{b_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 2 familles de nombres complexes. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, :

$$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

3. (a) Pour $A > 0$ et $B > 0$, on définit, pour $t > 0$ la fonction $\varphi(t) = At^2 + Bt^{-2}$. Démontrer que, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) \geqslant 2\sqrt{AB}$

   (b) En déduire **l'inégalité de Schwarz pour les sommes finies :** [3]

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)}$$

Exercice 37 :

Application des inégalités de Schwarz

1. On se donne un entier $\geqslant 1$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$$

3. On se donne un entier $n \geqslant 1$ et des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$

4. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$

3. Cette inégalité peut aussi se prouver à partir des propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$