7.8 Correction de quelques exercices

Exercice 2 :

On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. *Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?*

Exercice 34 :

Si $x \in \mathbb{R}$, *on note* $\{x\} = x - [x]$ *la partie fractionnaire de* x.
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *un nombre irrationnel et* f *de* $\mathbb{N}$ *dans* $[0,1[$ *définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & [0,1[\\ n & \longmapsto & f(n) = \{n\theta\} \end{array}\right.$$

Que $\{x\} \in [0,1[$ est évident puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leqslant x < [x]+1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x - [x] < 1$$

1. *Montrer que* f *est injective*

   Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ et supposons que nous ayions $f(m) = f(n)$; alors :

   $$\begin{array}{rl} \{m\theta\} - \{n\theta\} \Longleftrightarrow & m\theta - [m\theta] = n\theta - [n\theta] \\ \Longleftrightarrow & \theta(m-n) = [m\theta] - [n\theta] \end{array}$$

   La dernière égalité sous-entend que si $m \neq n$, alors, $\theta \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible ; donc $m = n$ et f est injective.

2. *Démontrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un couple d'entiers* $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $m \neq n$ *et* $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$

   Soient $\varepsilon > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{q} < \varepsilon$

   On subdivise l'intervalle $[0,1[$ en q intervalles $I_k = \left[\dfrac{k}{q}; \dfrac{k+1}{q}\right[$ où $k = 0, \ldots, q-1$. La famille $(I_k)_{k=0,\ldots,q-1}$ forme une partition de $[0,1[$.
   Pour $j = 0, \cdots, q$, les $q+1$ nombres $(f(j))_{j=0,\cdots,q}$ sont tous dans $[0,1[$, et du fait de l'injectivité de f sont tous différents.
   Il existe donc k_0 tel que $0 \leqslant k_0 \leqslant q-1$, m et n avec $0 \leqslant m \leqslant q$ et $0 \leqslant n \leqslant q$ tels que $f(m) \in I_{k_0}$ et $f(n) \in I_{k_0}$

   En effet, supposons qu'il y ait au plus un seul élément $f(j)$ dans chacun des I_k ; ceci entendrait qu'il existe j_0 et j_1, $j_0 \neq j_1$ tels que $f(j_0) = f(j_1)$; ce qui est contradictoire avec l'injectivité de f.

   Donc, si $f(m) \in I_{k_0}$ et $f(n) \in I_{k_0}$, alors $0 < |f(m) - f(n)| < \dfrac{k_0+1}{q} - \dfrac{k_0}{q} = \dfrac{1}{q} < \varepsilon$

   Ce que nous voulions

3. *En déduire que l'ensemble* $\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$

   Il y a 2 façons de répondre à cette question :
   - **La première, en utilisant les résultats sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$**
     En effet, d'après 7.6.5 les ensembles $G = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}$, denses dans $\mathbb{R}$.
   - **La seconde, en utilisant les résultats de l'exercice**
     Nous appelons donc $G = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$
     Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $|x - t| < \varepsilon$
     D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ tels que $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q\,(f\,(m) - f\,(n)) > \{t\}$.
L'ensemble $\{q \in \mathbb{N}$ tel que $q\,(f\,(m) - f\,(n)) > \{t\}\}$ est donc non vide et possède un plus petit élément p. Alors :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant \{t\} < p\,(f\,(m) - f\,(n))$$

Donc :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant \{t\} < (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

Ce qui retraduit, donne :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant t - [t] < (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

Ou, ce qui est équivalent :

$$[t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant t < [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

En posant $x = [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n))$, nous avons bien $|x - t| < \varepsilon$; mais qu'est donc x ?

$$x = [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) = [t] + (p-1)\,(m\theta - [m\theta] - n\theta - [n\theta])$$

Et donc $x = [t] + (p-1)\,([m\theta] - [n\theta]) + (p-1)\,(m-n)\,\theta$, et donc $x \in G$
G est donc dense dans $\mathbb{R}$...........OUF ! !

Exercice 35 :

1. *Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $2\,|zz'| \leqslant t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2$*

   Il suffit de calculer et développer $\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2$.

   $$\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2 = t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2 - 2\,|zz'|$$

   Comme $\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2 \geqslant 0$, nous avons :

   $$t^2\,|z|^2 - t^{-2}\,|z'|^2 - 2\,|zz'| \geqslant 0 \Longleftrightarrow t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2 \geqslant 2\,|zz'|$$

   L'égalité n'ayant lieu que si $t = \sqrt{\dfrac{|z'|}{|z|}}$ avec $z \neq 0$

2. *Soient $\{a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{b_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$, 2 familles de nombres complexes. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, :*

   $$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

   Pour un i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ fixé, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, nous avons $2\,|a_i b_i| \leqslant t^2\,|a_i|^2 + t^{-2}\,|b_i|^2$.

   Donc, en passant à la sommation, nous avons : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\,|a_i b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(t^2\,|a_i|^2 + t^{-2}\,|b_i|^2\right)$, c'est à dire, en factorisant et en utilisant la linéarité de la somme,

   $$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

3. (a) *Pour $A > 0$ et $B > 0$, on définit, pour $t > 0$ la fonction $\varphi\,(t) = At^2 + Bt^{-2}$. Démontrer que, pour tout $t > 0$, $\varphi\,(t) \geqslant 2\sqrt{AB}$*

   ▷ Premièrement, il n'y a pas de problème de domaine et nous avons :

   $$\lim_{t \to +\infty} \varphi\,(t) = \lim_{t \to 0} \varphi\,(t) = +\infty$$

▷ Calculons maintenant la dérivée de φ :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2At - 2Bt^{-3}\\ &= 2t^{-3}\left(At^4 - B\right)\\ &= 2t^{-3}\left(\sqrt{A}t^2 + \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}t^2 - \sqrt{B}\right)\\ &= 2t^{-3}\left(\sqrt{A}t^2 + \sqrt{B}\right)\left(A^{\frac14}t + B^{\frac14}\right)\left(A^{\frac14}t - B^{\frac14}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi'(t) = 0 \Longleftrightarrow A^{\frac14}t - B^{\frac14} = 0 \Longleftrightarrow t = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$$

▷ Le signe de la dérivée dépend donc de celui de $A^{\frac14}t - B^{\frac14}$. Donc :

— Si $0 < t \leqslant \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$ alors $\varphi'(t) \leqslant 0$ et la fonction φ est décroissante

— Et si $t \geqslant \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$ alors $\varphi'(t) \geqslant 0$ et la fonction φ est croissante

— φ admet donc un minimum en $t_0 = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$

▷ Ainsi, pour tout $t > 0$, nous avons $\varphi(t) \geqslant \varphi(t_0)$. Or,

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= \varphi\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)\\ &= A\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)^2 + B\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)^{-2}\\ &= A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac12} + B\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac12}\\ &= A\sqrt{\frac{B}{A}} + B\sqrt{\frac{A}{B}}\\ &= 2\sqrt{AB}\end{aligned}$$

Et donc, pour pour tout $t > 0$, $\varphi(t) \geqslant 2\sqrt{AB}$

(b) *En déduire l'inégalité de Schwarz pour les sommes finies :*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)}$$

Nous avons montré que, pour tout $t > 0$,

$$2\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant t^2\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)$$

En posant $A = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$ et $B = \sum_{i=1}^n |b_i|^2$ et reprenant $\varphi(t) = At^2 + Bt^{-2}$, nous avons donc :

$$2\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \varphi(t)$$

En particulier, $2\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \inf_{t>0} \varphi(t)$, c'est à dire $2\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant 2\sqrt{AB} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sqrt{AB}$

Ce qui, retraduit avec les hypothèses donne :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)}$$

Comme $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$, nous avons l'inégalité demandée

Exercice 36 :

1. *On se donne un entier $\geqslant 1$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Nous allons tenter d'aller plus loin en travaillant sur les nombres complexes.
Soit donc un entier $\geqslant 1$ et des nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1 \times x_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |1|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)} \Longleftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)}$$

Ce qui donne, en élevant au carré : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 \leqslant n \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)$

Si les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, nous avons $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ et $|x_i|^2 = x_i^2$, et si les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, nous avons bien $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

2. *Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons :* $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$

En posant, pour $k = 1, \cdots, n$ $a_k = k$ et $b_k = \sqrt{k}$, l'inégalité de Schwarz nous donne :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}$$

Or, de manière classique, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et donc :

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \times \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$$

D'où le résultat.

3. *On se donne un entier $n \geqslant 1$ et des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que* $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$

On se donne, pour $k = 1, \cdots, n$ $a_k = \sqrt{x_k}$ et $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$; alors, l'inégalité de Schwarz nous montre que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_k})^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right)}$$

Ce qui nous donne :

$$n \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_k\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)}$$

Ce qui nous donne le résultat en élevant au carré.

4. *Montrer que, pour* $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$

   En posant $x_k = k^2$ dans l'inégalité $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$ démontrée à la question précédente, nous avons :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \geqslant n^2$$

   Or, identité bien connue : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et l'inégalité devient :

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \geqslant n^2$$

   D'où le résultat, par simplification